



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 5 - 1999 г.
Школа в «Кванте»

А. Стасенко

Зачем закрывать отверстие, или Открытие линзы

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!
<http://www.accessnet.ru/vivovoco>

и растягивая пружину (рис.2). По достижении максимальной точки подъема (ход поршня l) альпинист «зарубается» в точке B' , нижнее крепление цилиндра в точке A освобождается, и пружина подтягивает цилиндр на высоту l (рис.3); при этом ее растяжение остается равным x_0 , таким, что $kx_0 = Mg$. А пар пусть вытесняется поршнем в наружный змеевик-конденсатор, где превращается в жидкость и сливается на дно цилиндра.

Предполагается, что значение координаты поршня $x = 0$ соответствует нерастянутой пружине (обозначим ее длину через l_0); значит, при растяжении на x возникает возвращающая сила $-kx$. В этих терминах работа пара по перемещению массы m альпиниста на высоту l (относительно x_0) запишется в виде

$$A_{\uparrow} = \int_{x_0}^{x_0+l} (mg + kx) dx = mgl + \frac{k}{2} \left((x_0 + l)^2 - x_0^2 \right).$$

Но тепло подогревателя расходуется не только на совершение работы по подъему альпиниста, но и на испарение жидкости и увеличение внутренней энергии образовавшегося пара. На испарение жидкости нужно затратить тепловую энергию (эта энергия выбрасывается в окружающее пространство при конденсации пара в змеевике), равную $r\Delta m_l$, где r – удельная теплота испарения, Δm_l – масса пара в конце подъема, которую легко найти из уравнения Клапейрона – Менделеева:

$$\Delta m_l = \frac{p_l M}{RT_l} S(l + l_0 + x_0).$$

Тут все величины известны. Для увели-

чения внутренней энергии пара понадобится количество теплоты, равное

$$\Delta U = c_v \Delta T \Delta m_l.$$

Здесь $c_v = \frac{j R}{2 M}$ – удельная теплоемкость пара при постоянном объеме, R – универсальная газовая постоянная, M – молярная масса пара, j – число степеней свободы его молекул (например, для одноатомного газа $j = 3$, а для трехатомного газа – типа водяного пара – $j = 6$). Ясно, что в конце подъема (при $x = x_0 + l$) давление поршня на пар (и значит, давление пара на поршень) больше, чем в начале, на величину

$$p_l - p_0 = \frac{kl}{S},$$

где S – площадь сечения цилиндра. Предположим, что пар насыщенный, т.е. капелька рабочей жидкости еще остается на дне цилиндра, когда поршень достигает высшей точки подъема. Значит, конечная температура пара T_l будет несколько больше начальной T_0 . Слово «несколько» отражает тот факт, что зависимость давления насыщенного пара от температуры очень резкая, так что малому изменению $\Delta T = T_l - T_0$ соответствует существенно большее приращение $\Delta p = p_l - p_0$. Эту связь давления насыщенных паров с температурой для любого вещества можно найти в соответствующих справочниках. (А можно использовать так называемый закон Клапейрона – Клаузиуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{TV},$$

где V – объем пара. Для численной оценки можно малые приращения в уравнении заменить конечными Δp и ΔT , тогда $V = lS$ – объем, занимаемый

паром в конце расширения. При большом желании можно проинтегрировать уравнение (по температуре) и получить зависимость $p = p_0 e^{\frac{rM}{RT}}$.)

Что же общего в движениях свинцовой крыши и «Скалолаза»? То, что оба движения периодические, в обоих важную роль играет тяготение, оба связаны с тепловыми процессами. А что различного? То, что в случае крыши существенное значение имеет сила трения, а в случае вертикального движения «Скалолаза» ее вообще нет. Но не будем сейчас увлекаться подробностями о том, как поехала крыша. Нам ведь нужно двигаться вверх, а не вниз.

Итак, сделан первый набросок теории. Наш Способныйнавсечуециник понимал, что принято много упрощающих предположений – например, о полном отсутствии воздуха в цилиндре, об идеальной теплоизоляции, идеальной пружине (к тому же Сантехник и Математик стали намекать, что не так уж просто достать Абсолютно Нетеплопроводящую Трубу и Абсолютно Невесомую Пружину – самим надо). В общем, как во всяком большом деле, тут-то и надо начинать работать. И от крышки кипящего чайника, которую, согласно легенде, наблюдал в детстве Джеймс Уатт, до изобретенной им паровой машины уткло немало воды. Значит, стоит делать численные оценки, решать уравнения, оптимизировать конструкцию (минимум веса и расхода топлива, максимум скорости подъема), затем создать работающую модель, наладить производство, сбыт, получение прибыли (и не забыть при этом отчислить 10% от нее на издание «Кванта»).

Зачем закрывать отверстие, или Открытие линзы

А . Ñ Ò À Ñ Å Í Ê Î

РАССМОТРИМ ТАКУЮ СИТУАЦИЮ: на непрозрачный экран с круглым отверстием нормально падает параллельный пучок света, или, что то же

самое, плоская световая волна. Теперь предлагается часть площади отверстия перекрыть непрозрачным препятствием – шариком, шайбой или кольцом.

Вопрос: как изменится освещенность в некоторой точке за экраном, лежащей на оси отверстия? Скорее всего, любой прохожий ответит: конечно, уменьшится! И будет прав, но... не всегда и не совсем.

Конечно, бытовая практика убеждает в том, что уменьшение площади отверстия, пропускающего свет внутрь некоторого объема, уменьшает и освещенность этого объема: ведь для того и служат плотные шторы на окнах, для того и щурят глаза при ярком свете, а зрачки и помимо нашей воли уменьшают свой диаметр.

Но принципиально важен и встречный вопрос: а каково соотношение между длиной волны λ , радиусом отверстия r и расстоянием до точки наблюде-

ния x (рис.1)? Этот вопрос связан с пониманием роли интерференции, суть которой заключается во взаимодействии двух волн, пришедших в точку наблюдения (рис.2): если эти волны пришли в одной фазе (или со сдвигом фаз, кратным 2π , что соответствует разности хода волн, равной целому числу длин волн), то их «горбы» и «впадины» складываются; если же волны придут в противофазе (или с разностью хода, равной нечетному числу половолн), то результатом их взаимодействия в данной точке может стать взаимное уничтожение.

Чтобы понять суть дела, повторим геометрические построения, которые до нас догадался сделать Огюстен Френель еще в начале прошлого века. Проведем из точки наблюдения P (рис.3) несколько лучей: один из них пусть пройдет через центр отверстия, другой будет ровно на $\lambda/2$ длиннее предыдущего, ..., и опишем, как ножкой циркуля, каждым из этих лучей окружности в плоскости отверстия с радиусами $r_1, r_2, \dots$. Далее, разобьем первый круг на кольца ($a_1, b_1, \dots, \varepsilon_1, \eta_1, \gamma_1$) одной и той же площади. Согласно Гюйгенсу и Френелю, каждое из этих колец посылает в точку P вторичные волны (первичная волна пришла в плоскость самого отверстия), причем их амплитуды пропорциональны площадям колец (они, по построению, одинаковы), а сдвиг фаз нарастает с удалением от центра и

достигает величины, соответствующей разности хода $\lambda/2$ у края зоны радиусом r_1 (так называемой первой зоны Френеля). Этот набор слов иллюстрируется на рисунке 3 справа в виде малых векторов $\vec{a}_1, \vec{b}_1, \dots, \vec{\eta}_1, \vec{\gamma}_1$, имеющих (почти) одинаковую длину, но повернутых друг относительно друга на упомянутую разность фаз, причем последний вектор $\vec{\gamma}_1$ по договору повернут относительно $\vec{a}_1$ на 180° (или π), что и свидетельствует о разности хода $\lambda/2$ между соответствующими волнами. Сумма всех этих малых векторов равна $\vec{A}_1$. А почему упомянуто слово «почти»? Да потому что кольцо γ_1 все-таки дальше от точки наблюдения, чем центральный диск a_1 ; следовательно, пришедший от него в точку P сигнал будет чуть слабее.

Прделаем аналогичные построения для кольца, лежащего между окружностями с радиусами r_1 и r_2 (вторая зона Френеля). В результате сумма возмущений $\vec{a}_2, \vec{b}_2, \dots, \vec{\eta}_2, \vec{\gamma}_2$, приходящих от элементов этого кольца, даст вектор $\vec{A}_2$, противоположно направленный по отношению к вектору $\vec{A}_1$ (и несколько меньший по модулю). Таким образом, вторичные волны, пришедшие от второй зоны Френеля, почти полностью погасят те, которые пришли от первой зоны.

Уже на этом этапе почти все понятно: из отверстия радиусом r_1 в точку P придет света гораздо больше, чем из отверстия радиусом $r_2 > r_1$. Значит, уменьшив площадь отверстия, мы увеличили освещенность в точке наблюдения! Но продолжим увеличивать радиус отверстия. Достигнув трех зон Френеля, увидим, что вектор $\vec{A}_3$ будет почти равен вектору $\vec{A}_1$, и, следова-

тельно, освещенность в точке P возрастет. Открыв четвертую зону, мы вновь почти погасим свет в точке наблюдения; пятая зона приведет опять к росту освещенности и т.д. Когда непрозрачное препятствие полностью исчезнет, спираль (так называемая спираль Френеля) свернется в центр окружности диаметром A_1 , а в точке P останется первичная волна с амплитудой A_0 , приблизительно вдвое меньшей A_1 .

Но пора бы сделать и численные оценки. Из прямоугольного треугольника $O\gamma_1 P$ (см. рис.3) можно найти радиус первой зоны Френеля:

$$r_1 = \sqrt{\left(x + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - x^2} = \sqrt{\lambda x + \frac{\lambda^2}{4}} \approx \sqrt{\lambda x} \quad (1)$$

(здесь мы пренебрегли малой величиной $\lambda^2/4$, считая, что расстояние от отверстия до точки наблюдения много больше длины волны, т.е. $x \gg \lambda$). Аналогично найдем

$$r_2 = \sqrt{2\lambda x}, \quad r_3 = \sqrt{3\lambda x}, \quad \dots, \quad r_m = \sqrt{m\lambda x}. \quad (2)$$

(Отметим здесь замечательный факт: площадь круга, лежащего в плоскости отверстия, пропорциональна разности длин лучей, проведенных из точки P к окружности и к центру. Причем это верно не только для дискретных значений этой разности ($\frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, \dots, m\frac{\lambda}{2}$), но и для любых значений. Этот факт и был использован выше при построении элементарных возмущений $\vec{a}_1, \vec{b}_1, \dots, \vec{\gamma}_1$: именно благодаря тому, что одинаковым приращениям площади соответствуют одинаковые приращения длины луча, векторы возмуще-

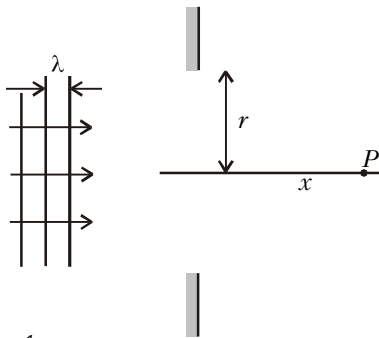


Рис. 1

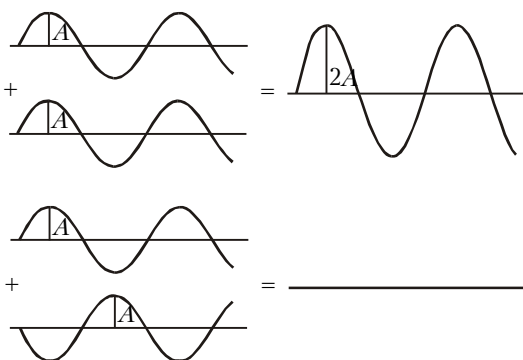


Рис. 2

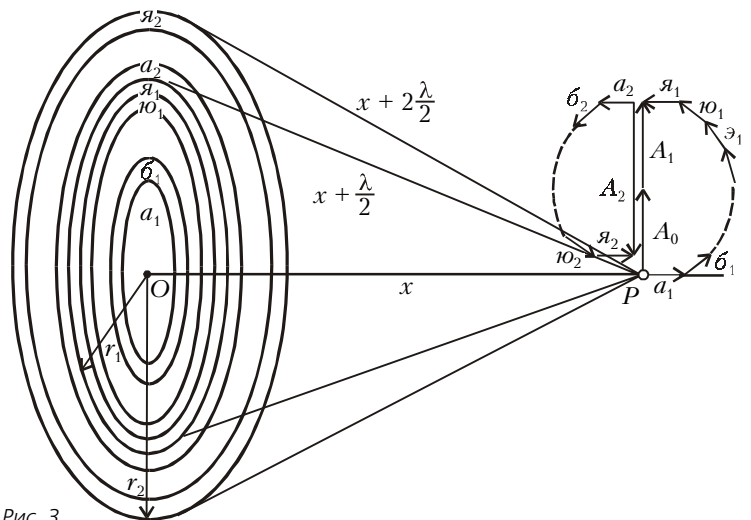


Рис. 3

ний на рисунке 3 образуют полуокружностью.)

Пусть отверстие в непрозрачном экране имеет, например, радиус $r = 1$ мм, а длина волны, падающей на него, равна $\lambda = 0,5$ мкм. Тогда, согласно формуле (1), заданное отверстие представляет собою одну первую зону Френеля ($r_1 \equiv r$) для точки с координатой

$$x_1 = \frac{r^2}{\lambda} = 2 \text{ м}$$

— в этой точке будет наибольшая амплитуда (и интенсивность) волны. Теперь, отправившись от точки с координатой x_1 , будем приближаться к отверстию вдоль оси. На некотором расстоянии

$$x_2 = \frac{r^2}{2\lambda} = \frac{x_1}{2} = 1 \text{ м}$$

это фиксированное отверстие будет представлять собой уже две зоны Френеля; следовательно, в этой точке почти не будет света. Чем ближе к отверстию, тем большему числу зон Френеля оно будет соответствовать. Таким образом, для всех точек с координатой $x < x_1$ суммарная амплитуда всех вторичных волн будет изображаться вектором $\vec{A}$, начало которого закреплено, а конец движется по спирали Френеля против часовой стрелки (см. рис.3). Значит, свет и тьма будут сменять друг друга, а вблизи отверстия освещенность станет равной I_0 (соответствующей амплитуде A_0). Это изменение освещенности вдоль оси качественно изображено на рисунке 4.

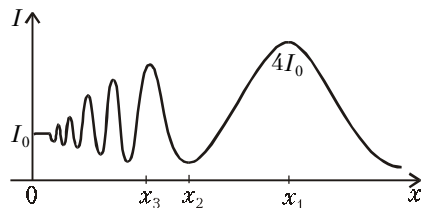


Рис. 4

А что если мы отправимся в другую сторону? Для точек с координатой $x > x_1$ амплитуда волны будет изображаться вектором, конец которого скользит по спирали Френеля по часовой стрелке. Интенсивность света будет монотонно падать, причем можно сказать, по какому закону: $I \sim 1/x^2$, так как с большого расстояния отверстие будет казаться точкой.

Только что мы рассмотрели случай отверстия фиксированного радиуса. А если, наоборот, зафиксировать точку на оси и открывать отверстие, увеличивая его радиус по некоторому временному закону $r(t)$? Тогда, начиная от

полной темноты (при $r = 0$), мы сначала откроем первую зону Френеля (при этом будет самый яркий свет с интенсивностью $I_1 = 4I_0$), затем вторую (тьма), третью (свет) и так далее, вплоть до полностью открытого фронта с интенсивностью первичной волны I_0 . Иными словами, при открывании отверстия наблюдатель в фиксированной точке зарегистрирует целую последовательность вспышек.

Но вернемся к самой спирали Френеля и обсудим, что будет, если как-то избавиться от всех четных зон, которые создают в точке P возмущения, гасящие те, которые приходят от нечетных зон. Действительно, закроем четные зоны *непрозрачными* кольцами (рис.5). Тогда все векторы $\vec{A}_1, \vec{A}_3, \vec{A}_5, \dots$ выстроятся друг другу «в затылок», и

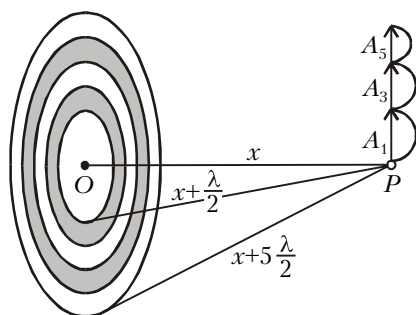


Рис. 5

их сумма даст гораздо более сильный сигнал, чем одна зона.

Но зачем же так просто терять свет от четных зон? Лучше прикроем их *прозрачными* (стеклянными) кольцами (рис.6), подобрав их толщину так, чтобы они «подтормаживали» свет, но не просто как-нибудь, а внося разность фаз, в точности равную нечетному числу π . А именно, пусть их толщина h такова, что

$$h(n-1) = (2m+1) \frac{\lambda}{2},$$

где n — показатель преломления этих

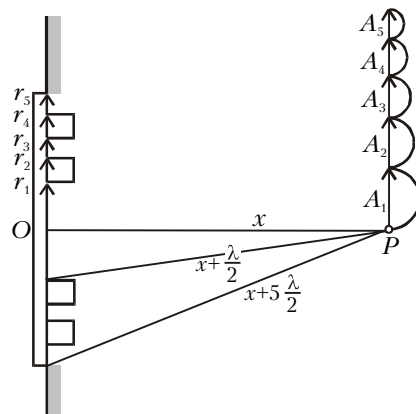


Рис. 6

стеклышек, а $m = 0, 1, \dots$ При этом векторы $\vec{A}_2, \vec{A}_4, \dots$ «станут в строй», развернувшись в том же направлении, что и возмущения от нечетных зон. Очевидно, что суммарный сигнал в точке P еще увеличится.

А нужно ли так грубо обращаться с фазой? Мы ведь можем так отшлифовать эти стеклянные кольца, чтобы в пределах каждой зоны они плавно изменяли фазы проходящего через них света, компенсируя геометрическое запаздывание (рис.7; сплошная ступенчатая линия слева). В результате полуокружность диаметром A_1 развернется в отрезок длиной $\frac{\pi}{2} A_1$. То же самое произойдет в каждой зоне Френеля, так что вся спираль развернется в один отрезок прямой — и в точке P будет достигнута максимально возможная освещенность.

Но зачем же изготавливать из стекла такое ступенчатое тело? Ведь это даже и неудобно. Поэтому добавим в каждой зоне такую толщину стекла, которая вносила бы разность хода в целое число длин волн, обеспечивая при этом плав-

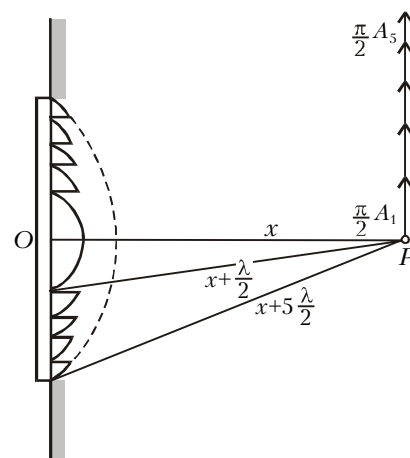


Рис. 7

ные обводы (рис.7; штриховая линия слева). Ба! Да ведь это же линза! А точка P , о которой мы так заботились, — ее фокус.

Так ради чего старались? А ради того, чтобы понять, что и просто круглое отверстие обладает свойствами линзы. Причем у этой «линзы» много «фокусов» (см. рис.4), между которыми расположены точки минимальной интенсивности. А куда же делась энергия из этих точек? Никуда, просто она перераспределена в плоскости, перпендикулярной оси, так что каждая «темная» точка оказалась окруженной системой светлых колец.