



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»  
тел. : [095] 930-56-48  
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

**№ 5 - 1999 г.  
Школа в «Кванте»**

**А. Стасенко**

## ***Как подпрыгнуть выше крыши***

*Использование или распространение этого материала  
в коммерческих целях  
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск  
**VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!**  
<http://www.accessnet.ru/vivovoco>

## Физика 9–11

Публикуемая ниже заметка «Как подпрыгнуть выше крыши» предназначена девятиклассникам, заметка «Паровой скалолаз, или Термодинамика для альпиниста» — десятиклассникам, «Зачем закрывать отверстие, или Открытие линзы» — одиннадцатиклассникам.

# Как подпрыгнуть выше крыши

À . Ñ Ò À Ñ Å Í Ê Î

Выше носа не прыгнешь.

Устаревший экспериментальный факт

ЧТО ЗНАЧИТ ПОДПРЫГНУТЬ? ЭТО сложный процесс, сопровождающийся приседанием, распрямлением, отталкиванием носками... и в конце концов приземлением — по возможности «мягким». О прыгании написаны, вероятно, сотни или даже тысячи диссертаций учеными медицинских и физкультурных наук. А сколько рекордов!

У нас более скромная цель: всего лишь подпрыгнуть выше крыши; поэтому нужна простая физическая модель.

Слово «подпрыгнуть» означает, очевидно, отсутствие разбега. Предпопо-

ложим, мы можем в прыжке поднять свой центр масс на высоту  $y_m \sim 1$  м над обычным положением (стоя). Поскольку движение происходит в постоянном поле тяготения Земли, легко найти начальную скорость (в момент отрыва):

$$v_0 = \sqrt{2gy_m} \sim 4,5 \text{ м/с}$$

и время полета (от отрыва до касания земли):

$$t_0 = 2\sqrt{\frac{2y_m}{g}} \sim 1 \text{ с.}$$

Здесь мы применили хорошо известные законы для движения точечной

массы с постоянным ускорением и, конечно, воспользовались очень приятным упрощающим предположением: «сопротивлением воздуха пренебречь».

Но как наш центр масс приобретает скорость  $v_0$ ? Присев, мы затем распрямляемся в течение некоторого времени  $\tau$  за счет энергетических затрат собственного организма, так что к моменту отрыва от земли наше тело массой  $m_0$  приобретает кинетическую энергию  $m_0 v_0^2 / 2$ . Этот процесс можно изобразить качественно в виде штриховых кривых на рисунке 1.

Но этак слишком высоко не прыгнешь. И тут приходит мысль о Винни-Пухе, который догадался использовать воздушный шарик, чтобы добраться до меда на дереве. Последуем его примеру.

Наполним шар легким газом — водородом плотностью  $\rho_V = \frac{2}{29} \rho_0$ , где  $\rho_0$  — плотность воздуха. Масса газа в объеме шара равна  $m_V = V \rho_V = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_V$ , где  $r$  — радиус шара. Но и оболочка шара обладает какой-то массой, а именно  $m_S = 4\pi r^2 \sigma$ , где  $\sigma$  — поверхностная плотность оболочки. Поэтому теперь при распрямлении придется разгонять не только собственную массу, но еще и массу оболочки  $m_S$ , и массу водорода в оболочке  $m_V$ . И это еще не все. Оказывается, при ускорении любого тела в воздухе (любом другом газе или жидкости) приходится приводить в ускоренное движение и определенную массу окружающей среды — так называемую присоединенную массу. Этот факт качественно отражен на рисунке 2: при перемещении шара вверх закрашенный вверх объем воздуха должен как-то очутиться внизу. Если предположить,

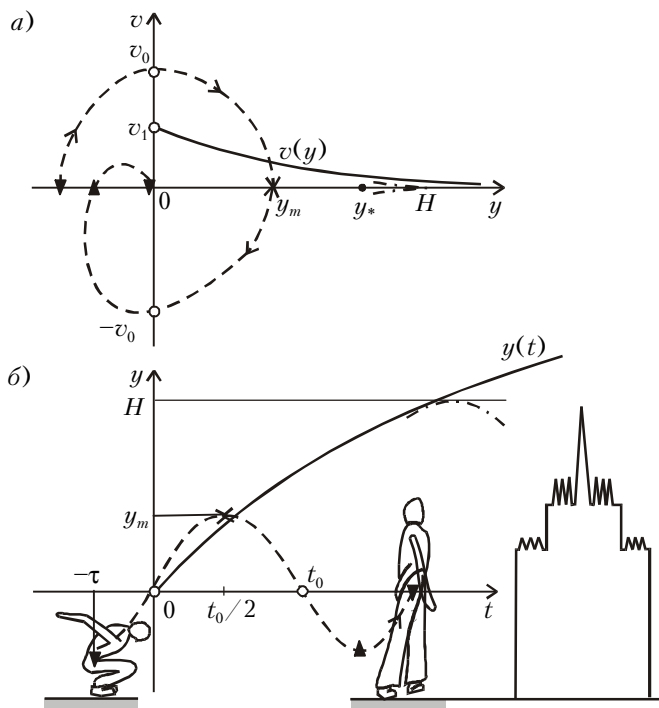


Рис. 1

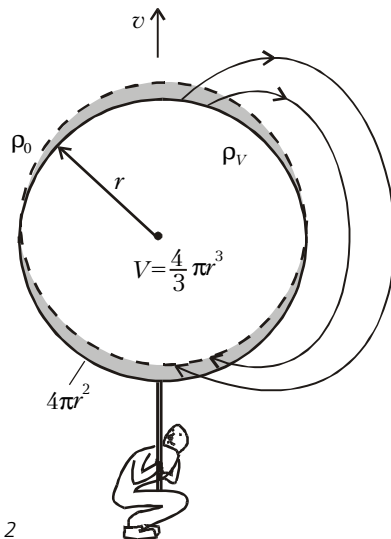


Рис. 2

что наш шарик не деформируется, эта присоединенная масса оказывается в точности равной половине массы воздуха в объеме шарика:  $m_* = \rho_0 V/2$ .

Таким образом, желающему подпрыгнуть вместе со всем этим устройством нужно будет ускорить суммарную массу  $m = m_0 + m_V + m_S + m_*$ . Это явно не легче. Да еще придется преодолевать силу сопротивления воздуха шарiku, которой теперь уже никак пренебречь нельзя. Эта сила сопротивления пропорциональна площади поперечного сечения шарика, плотности воздуха и квадрату скорости движения. Это легко устанавливается из соображений размерности, а безразмерный коэффициент пропорциональности можно измерить экспериментально. В результате получим

$$F_c = \frac{\pi}{4} \rho_0 r^2 v^2$$

(проверьте, по крайней мере, размерность). И конечно, надо добавить еще подъемную силу Архимеда, равную  $\rho_0 Vg$ .

Итак, запишем закон движения (второй закон Ньютона) прыгуна в воздухе:

$$ma = -(m_0 + m_V + m_S)g + \rho_0 Vg - \frac{\pi}{4} \rho_0 r^2 v^2. \quad (1)$$

Но, подобно ситуации с Винни-Пухом, в состоянии покоя, когда скорость и ускорение равны нулю, сила Архимеда должна уравновешивать силу притяжения Земли, так что уравнение (1) примет вид

$$\frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_0 - \rho_V) = m_0 + 4 \pi r^2 \sigma$$

(любопытно, что при этом условии суммарная инертная масса, которая будет играть роль при ускоренном движении, становится равной  $3m_*$ ).

Если заданы  $m_0$  и  $\sigma$ , получаем кубическое уравнение для определения радиуса шара (желающий да решит его). В частности, отсюда легко найти наименьшее значение этого радиуса. Предположим, что оболочка невесома:  $\sigma = 0$ . Тогда

$$r_{\min} = \sqrt[3]{\frac{3m_0}{4\pi(\rho_0 - \rho_V)}}.$$

Принимая массу школьника или студента (перед обедом)  $m_0 = 50$  кг, а плотность воздуха  $\rho_0 = 1$  кг/м<sup>3</sup>, получим

$$r_{\min} \approx 2,3 \text{ м.}$$

Очевидно, что для подъема весомой оболочки придется увеличить объем шара, добавив еще легкого газа.

Если предположить, что в любом случае прыгун располагает одним и тем же запасом энергии

$$\frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2,$$

то в момент отрыва от земли будет достигнута явно меньшая скорость (см. рис. 1, а):

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{m_0}{m}} < v_0.$$

И даже меньшая этой, если учесть еще и затраты энергии на преодоление сопротивления воздуха в процессе распрямления.

И вот мы оттолкнулись от земли и движемся вверх. В уравнении движения осталась только сила сопротивления воздуха:

$$ma = -\frac{\pi}{4} \rho_0 r^2 v^2. \quad (2)$$

Но что такое ускорение? Это изменение скорости со временем:  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ . А что такое скорость? Это изменение перемещения со временем:  $v = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ . Отсюда для ускорения получим выражение

$$a = v \frac{\Delta v}{\Delta y}.$$

Подставим его в уравнение (2) и сократим на  $v$ :

$$\frac{\Delta v}{\Delta y} = -\frac{\pi}{4} \frac{\rho_0 r^2}{m} v.$$

Можно переписать это уравнение так, чтобы обе его части стали безразмерными:

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta y}{y_*}, \quad (3)$$

где величина  $y_* = \frac{4m}{\pi \rho_0 r^2}$  имеет, очевидно, размерность длины. И очевидно, что это не случайный масштаб: он характеризует *тем* изменения скорости с расстоянием. На этом расстоянии скорость заметно изменяется — например, в два раза; точнее, в три раза; еще точнее, в 2,7 раза. Но сейчас это не столь важно. Можно проанализировать уравнение (3) и не решая его.

Прежде всего видно, что скорость убывает с высотой: об этом говорит знак «минус». Далее видно, что эта убыль скорости тем меньше, чем меньше сама скорость. Когда же скорость стремится к нулю, то и ее «приращение» (отрицательное) тоже стремится к нулю. Значит, график  $v(y)$  подходит к оси  $y$  все ближе, никогда не достигая ее

при любом конечном значении  $y$  (см. сплошную кривую на рисунке 1, а). Получается, что мы все время будем двигаться вверх, правда все медленнее, но нигде не останавливаясь. В итоге зависимость высоты от времени будет иметь вид сплошной кривой на рисунке 1, б.

Вспомним, однако, что плотность атмосферы уменьшается с высотой; значит, будет уменьшаться и сила Архимеда, так что рано или поздно мы вернемся на землю. Кроме того, при очень малых скоростях изменится закон сопротивления воздуха. Сила станет пропорциональной уже первой степени скорости и так называемой *вязкости* воздуха, которой мы до сих пор пренебрегали. Но это произойдет при скоростях движения порядка микрометров в секунду. Эта численная оценка получается в предположении абсолютно спокойной атмосферы, а так не бывает. Воздух постоянно находится в движении (горизонтальный ветер, вертикальные перемещения теплого воздуха вверх и холодного вниз — так называемая конвекция). Эти крупномасштабные движения сопровождаются мелкими завихрениями (турбулентностью), в результате чего вязкость движущегося воздуха гораздо больше, чем спокойного, и к тому же непостоянна в пространстве и во времени. Все эти явления наши вдумчивые читатели смогут учесть в дальнейшем — в своих научных работах.

А сейчас, чтобы нам уверенно вернуться вниз, надо отказаться от точного уравновешивания силой Архимеда суммарной силы тяжести своего тела и шара и положить в карман хотя бы спичечный коробок или лучше бутерброд (водород горюч!). Этот небольшой перегрузок позволит кривой  $v(y)$  пересечь ось  $y$  на некоторой высоте  $H$ , превосходящей заданную высоту (например, здания МГУ на Воробьевых горах); значит, начнется движение вниз (штрих-пунктирные линии на рисунке 1). А легкий ветерок перенесет нас через дом, реку, лес... Это уже похоже на приятный прыжок во сне. Так что прыгайте на здоровье!