



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 4 - 1999 г.

Физпрактикум

Г. Меледин

СВЕРХЗВУК НА КОНЧИКЕ БИЧА

© Квант

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!
<http://www.accessnet.ru/vivovoco>

Сверхзвук на кончике бича

А. И. АЕААЕИ

*Чуть помедленнее, кони, чуть помедленнее!
Не указчики вам кнут и плеть...*

В.С.Высоцкий

В НАШИ СТРЕМИТЕЛЬНО БЕГУЩИЕ дни ассоциации, связанные со словами «бич», «кнут», «плеть», не из приятных. Хотя можно вообразить и идиллическую картину: сонный, расплавленный жарой воздух, нависший над зеленью луга, вдруг разрывает резкий щелчок кнута, и стадо лениво поднимается, подчиняясь пастуху. Но нас будет интересовать лишь то, каким образом сравнительно небольшими усилиями можно добиться очень высоких скоростей, пусть на небольшом участке кнута, приводящих к характерному звуку.

Итак, о кнуте, видимо, слышали все, но лишь немногие держали его в руках, пробовали в действии и представляют реально, что при этом происходит.

Обычно кнут представляет собой короткую палку-кнотовище, к концу которой прикреплен сплетенный из кожи или жгута длинный (несколько метров), прочный, с уменьшающимся к свободному концу сечением собственно кнут. Взмахом сообщают кнуту скорость, а потом резким движением кнотовища вызывают движение прикрепленной к нему части кнута в противоположную сторону. Через некоторое время раздается сильный щелчок (если кнут непрочный, то в этот момент часть его может оторваться). Оказывается, щелчок возникает, когда величина скорости у конца кнута переходит через значение скорости звука (как при переходе звукового барьера сверхзвуковым самолетом). Это получается вследствие того, что начальная кинетическая энергия концентрируется на все уменьшающемся движущемся отрезке кнута — кнотовище и остальная часть кнута, прикрепленная к нему, при этом неподвижна. Быстро растет плотность кинетической энергии, и, соответственно, нарастает скорость.

Все это можно рассчитать, что мы и сделаем, разобрав предварительно две

задачи, в чем-то перекликающиеся с задачей о кнуте.

Задача о «сифоне-цепочке». Через гвоздь перекинули тонкую длинную цепочку с малыми неупругими звеньями так, что часть цепочки лежит на краю стола высотой h , а часть — на полу (рис.1). С какой установившейся ско-

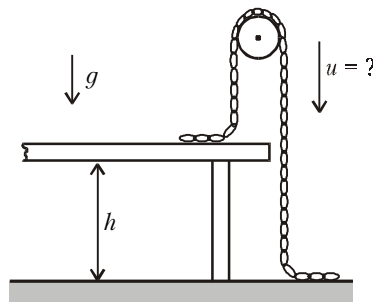


Рис. 1

ростью будет двигаться цепочка после того, как ее отпустят?

Введем линейную плотность цепочки $\rho = M/L$, где M — ее масса, а L — длина. Пусть установилась скорость u . Тогда за малое время Δt в движение вовлекается масса $\Delta m = \rho u \Delta t$, скорость которой изменяется от 0 до u , а импульс — от 0 до $\Delta p = \Delta m u = \rho u^2 \Delta t$. Этот импульс сообщает массе Δm сила тяжести $\rho h g$, действующая на неуравновешенную часть цепочки. Исходя из второго закона Ньютона,

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta(mu)}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} u + m \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Так как рассматривается движение с установившейся скоростью, имеем

$$F = \frac{\Delta m}{\Delta t} u = \frac{\rho u^2 \Delta t}{\Delta t} = \rho u^2 = \rho g h.$$

Отсюда получаем

$$u = \sqrt{gh}.$$

Заметим, что закон сохранения энергии $\Delta m g h = \Delta m u^2 / 2$ дает неправильный результат, так как часть приобретаемой при спуске энергии (ровно половина) теряется при неупругом ударе цепочки о пол.

Отметим также, что, если убрать гвоздь, т.е. рассматривать задачу о соскальзывании цепочки с края стола на пол, для нахождения установившейся скорости ни в решении, ни в ответе ничего не изменится.

Задача о нити в трубке. Внутри U-образной трубки массой M , находящейся на гладком столе, движется нерастяжимая нить массой m (рис.2; вид сверху). В начальный момент в каждом

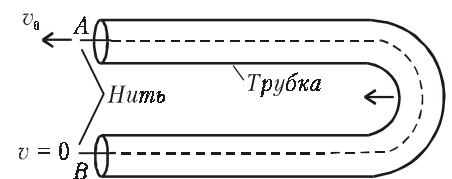


Рис. 2

колене трубки находилось по половине нити, а сама трубка двигалась. При этом скорость конца A нити была равна v_0 , а скорость конца B — нулю. С какой скоростью будет двигаться трубка, когда нить вылетит из нее? Движение трубки допускается только вдоль ее прямолинейных участков, радиус трубки считать очень малым. Трением пренебречь.

Так как нить нерастяжима, заданное в начальный момент соотношение скоростей для концов нити возможно лишь при условии, что скорость u_0 трубки относительно стола в этот момент равна $v_0/2$ и направлена в ту же сторону, что и скорость конца нити A .

Перейдем в систему отсчета, где начальная скорость трубки равна нулю. В этой системе половина нити с концом A имеет скорость $v_0/2$, импульс $(m/2)(v_0/2)$ и кинетическую энергию $(m/2)(v_0/2)^2/2$. А половина нити с концом B имеет скорость $-v_0/2$, импульс $-(m/2)(v_0/2)$ и кинетическую энергию $(m/2)(v_0/2)^2/2$. Таким образом, вначале в этой системе отсчета полный импульс нити, а также импульс и кинетическая энергия трубки равны нулю. Энергия нити при этом равна $m v_0^2 / 8$. Пусть после вылета нити из трубки скорость нити равна v , а скорость трубки равна u . Тогда законы сохранения импульса и энергии можно записать

следующим образом:

$$0 = Mu + mv, \quad \frac{mv_0^2}{8} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}.$$

Отсюда

$$u = -\frac{m}{\sqrt{M(m+M)}} \frac{v_0}{2}.$$

Знак «минус» выбран в соответствии с законом сохранения импульса, из которого следует, что скорости $\vec{u}$ и $\vec{v}$ направлены в противоположные стороны.

Возвращаясь в систему отсчета, связанную со столом, находим искомую скорость трубки:

$$u_1 = u + \frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{2} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{M(m+M)}} \right).$$

Задача о кнуте. Пусть вначале, двигая кнутовище со скоростью v_0 влево, такую же скорость сообщают всему кнуту по всей длине L , а потом, резко сдвинув кнутовище вправо, удерживают его неподвижно, прикладывая некоторую силу. Тогда длина l движущейся части кнута будет уменьшаться, а скорость v — увеличиваться. При каком значении l скорость v достигнет величины скорости звука $v_{\text{зв}}$ (рис.3)?

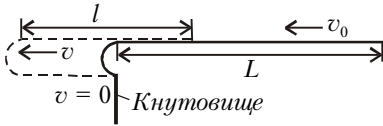


Рис. 3

Сначала для упрощения рассмотрим однородный кнут с массой M и длиной L , т.е. с линейной плотностью $\rho = M/L$. Из закона сохранения энергии

имеем

$$\frac{\rho L v_0^2}{2} = \frac{\rho l v^2}{2},$$

или

$$v = v_0 \sqrt{\frac{L}{l}}.$$

(Между прочим, отсюда видно, что при уменьшении l до нуля скорость v неограниченно растет.) Таким образом, получаем связь

$$v = -\frac{dl}{dt} = \frac{v_0 L^{1/2}}{l^{1/2}}.$$

Знак «минус» обусловлен уменьшением длины с течением времени. Запишем связь иначе:

$$l^{1/2} dl = -v_0 L^{1/2} dt$$

и проинтегрируем левую и правую части по интервалу времени t , за который длина движущейся части кнута меняется от L до l :

$$\int_L^l l^{1/2} dl = \frac{l^{3/2}}{3/2} \Big|_{l=L}^{l=l} = \frac{2}{3} (l^{3/2} - L^{3/2}) = -v_0 L^{1/2} t.$$

Отсюда получаем

$$l = L \left(1 - \frac{3}{2} \frac{v_0 t}{L} \right)^{2/3},$$

или, с учетом соотношения $v = v_0 L^{1/2} / l^{1/2}$, —

$$v = v_0 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{v_0 t}{L} \right)^{-1/3}.$$

Формально при $t = 2L/(3v_0)$ скорость v стремится к бесконечности, а длина l

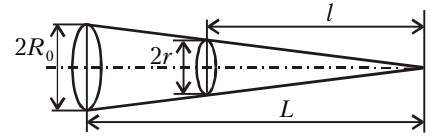


Рис. 4

— к нулю. Однако это получается при бесконечно тонком однородном кнуте, что нереалистично.

Рассмотрим теперь более реальный вариант: кнут с линейно уменьшающимся, от кнутовища к концу, радиусом кругового сечения. Из подобия треугольников на рисунке 4 следует $r = R_0 l / L$. Повторяя предыдущую схему рассуждений, запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{m_0 v_0^2}{2} = \rho \frac{\pi R_0^2 L}{3} \frac{v_0^2}{2} = \rho \frac{\pi r^2 l}{3} \frac{v^2}{2},$$

откуда, с учетом связи $r = R_0 l / L$, получаем

$$v = v_0 \left(\frac{L}{l} \right)^{3/2}.$$

Тогда

$$l = L \left(1 - \frac{5}{2} \frac{v_0 t}{L} \right)^{2/5}, \quad v = \frac{v_0}{\left(1 - \frac{5}{2} \frac{v_0 t}{L} \right)^{3/5}}.$$

Оценим, при какой длине l скорость v достигает значения скорости звука $v_{\text{зв}} \approx 330$ м/с. Положив $L = 5$ м, $v_0 = 1$ м/с, получим

$$l = \frac{L}{(v_{\text{зв}}/v_0)^{2/3}} \approx \frac{5 \text{ м}}{(330)^{2/3}} \approx \frac{5 \text{ м}}{50} = 0,1 \text{ м}.$$

Таким образом, при длине порядка 10 см от конца кнута происходит щелчок — переход звукового барьера.