



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 4 - 1999 г.

Практикум абитуриента

А. Черноуцан

Задачи с проводящими сферами

© Квант

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!
<http://www.accessnet.ru/vivovoco>

Задачи с проводящими сферами

Α. ΧΑΘΙΓΙΩΔΑΙ

ЗАДАЧИ НА ЭЛЕКТРОСТАТИКУ, в которых присутствуют одна или несколько проводящих сфер, традиционно оказываются трудными для многих абитуриентов. В особенности это относится к задачам на «перезарядку», где требуется выяснить, какие изменения произошли в системе при соединении отдельных проводников между собой. Большие трудности вызывают задачи на энергию системы проводников. Непреодолимым препятствием может оказаться и присутствие в задаче внешних зарядов (например, точечных), нарушающих сферическую симметрию системы.

Многие такие задачи решаются обычными школьными методами, в первую очередь – методом суперпозиции. Однако для успешного применения этих методов в задачах с проводящими сферами нужно хорошо понимать основные свойства проводников. А именно:

1) Проводник – это тело, в котором есть свободные заряды, способные перемещаться по объему проводника. В металлах, в частности, роль свободных зарядов играют электроны проводимости.

2) В электростатике рассматривается состояние равновесия системы, т.е. состояние, в котором отсутствует направленное движение зарядов (отсутствуют токи). Это означает, что напряженность электростатического поля в любой точке проводника должна быть равна нулю; в противном случае в окрестности этой точки немедленно начнется направленное движение свободных зарядов.

3) Все точки проводника имеют один и тот же потенциал, который называют потенциалом данного проводника. Поверхность проводника представляет собой эквипотенциальную поверхность. Силовые линии поля вне проводника перпендикулярны к его поверхности.

4) Объемная плотность заряда внутри проводника равна нулю. Все не-

скомпенсированные заряды проводника находятся на его поверхности.

5) Если заданы заряды или потенциалы всех проводников системы, то можно найти только одно распределение зарядов на проводниках (и единственное распределение поля в пространстве между проводниками), соответствующее этим данным. Эта так называемая теорема единственности играет важную роль в электростатике.

6) Энергия уединенного проводника (энергия поля вокруг проводника) равна

$$W = \frac{1}{2} q \Phi,$$

где q – заряд и Φ – потенциал проводника. Энергия системы проводников равна

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i.$$

Теперь перейдем к рассмотрению конкретных задач. Начнем с задачи о поле уединенной заряженной сферы.

Задача 1. На уединенную проводящую сферу радиусом R нанесен заряд q . Найдите напряженность и потенциал электрического поля во всех точках пространства. Вычислите потенциал сферы и ее энергию.

Из соображений симметрии очевидно, что заряд по поверхности сферы распределен равномерно. Напряженность поля внутри сферы равна нулю, а вне сферы напряженность такая же, как у поля точечного заряда q , помещенного в центр сферы:

$$E = 0 \text{ при } r < R,$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ при } r > R.$$

Что касается потенциала, то его удобнее найти сначала во внешней области. Так как напряженность поля сферы

совпадает с напряженностью поля точечного заряда, потенциалы этих полей могут различаться только константой, но, поскольку оба потенциала равны нулю на бесконечности, эта константа равна нулю. Следовательно,

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \text{ при } r \geq R. \quad (1)$$

Из условия непрерывности потенциала делаем вывод, что потенциал внутри сферы (потенциал сферы) равен

$$\Phi_{\text{сф}} = \Phi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \text{ при } r \leq R. \quad (2)$$

Полученные результаты для напряженности и потенциала изображены графически на рисунке 1. Отметим, что вычисление потенциала можно начинать не с внешней, а с внутренней области. Дело в том, что центр сферы

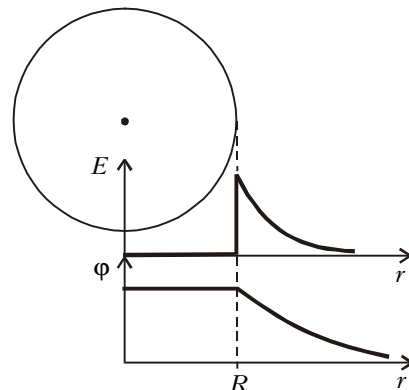


Рис. 1

находится на одном и том же расстоянии R от всех поверхностных зарядов, создающих поле, что позволяет легко вычислить потенциал в этой точке:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{ц}} &= \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_i}{R} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum \Delta q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}. \end{aligned} \quad (3)$$

В данном случае такой подход выглядит менее естественным, но иногда он оказывается удобным.

Осталось вычислить энергию сферы:

$$W = \frac{1}{2} q \Phi_{\text{сф}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Уместно лишний раз напомнить, что энергия сферы есть не что иное, как энергия электрического поля в пространстве вокруг сферы.

Задача 2. Проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 находятся на большом

расстоянии друг от друга. Первая сфера заряжена зарядом q , вторая не заряжена. Сферы соединяют длинной тонкой проволокой. Какие заряды окажутся на сферах после этого? Какое количество теплоты выделится в процессе перезарядки? Зарядом на проволоке пренебречь.

После соединения система двух сфер вместе с проволокой будет представлять собой единый проводник. Значит, в результате перезарядки потенциалы сфер сравняются:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_2}{R_2},$$

где q'_1 и q'_2 — новые заряды сфер (рис.2). Полный заряд системы в ре-



Рис. 2

зультате перезарядки не меняется, т.е.

$$q = q'_1 + q'_2.$$

Из этих уравнений можно вычислить заряды q'_1 и q'_2 :

$$q'_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} q, \quad q'_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} q.$$

Чтобы найти выделившееся количество теплоты, запишем закон сохранения энергии:

$$W_{\text{нач}} = W_{\text{кон}} + Q,$$

подставим сюда выражения для начальной и конечной энергий:

$$W_{\text{нач}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1},$$

$$W_{\text{кон}} = \frac{q'^2_1}{8\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q'^2_2}{8\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)}$$

и получим искомую величину:

$$Q = W_{\text{нач}} - W_{\text{кон}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)} \frac{R_2}{R_1}.$$

В этой задаче при вычислении потенциалов и энергий можно было рассматривать каждую сферу как изолированную. Другая ситуация возникает в случае вложенных друг в друга концентрических сфер.

Задача 3. Две тонкие концентрические проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) несут на себе заряды q_1 и q_2 соответственно. Вычислите потенциалы сфер и энергию системы. Какой заряд останется на внутрен-

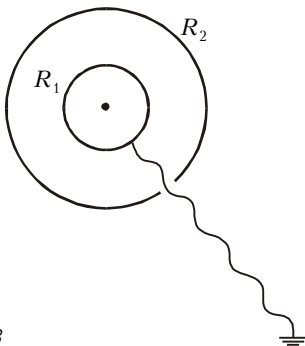


Рис. 3

ней сфере, если ее заземлить¹ (рис.3)? Как изменится при этом энергия системы?

Потенциал любой точки пространства можно найти по принципу суперпозиции — как сумму потенциала $\phi_1(r)$, создаваемого зарядами первой сферы, и потенциала $\phi_2(r)$, создаваемого второй сферой. Для каждой точки во внешней области ($r \geq R_2$) оба слагаемых надо вычислять по формуле (1) — получится потенциал поля точечного заряда. Значит, потенциал внешней сферы ($r = R_2$) равен

$$\phi(R_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{R_2}. \quad (4)$$

В пространстве между сферами ($R_1 < r < R_2$) вклад внутренней сферы надо вычислять по формуле (1), а вклад внешней сферы — по формуле (2):

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2}.$$

Положив в этой формуле $r = R_2$, мы опять получим потенциал внешней сферы, а положив $r = R_1$, получим ответ для потенциала внутренней сферы:

$$\phi(R_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2}. \quad (5)$$

Такой же потенциал будет у всех точек при $r < R_1$.

Энергия этой системы зарядов равна

$$W = \frac{1}{2} q_1 \phi(R_1) + \frac{1}{2} q_2 \phi(R_2) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1^2}{R_1} + \frac{2q_1 q_2}{R_2} + \frac{q_2^2}{R_2} \right).$$

Первый и третий члены представляют собой собственные энергии сфер, а второй член — энергию их взаимодействия.

После заземления внутренней сферы ее потенциал станет равным нулю. Применяя формулу (5), получим урав-

нение для нового заряда этой сферы:

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2},$$

откуда найдем

$$q'_1 = -q_2 \frac{R_1}{R_2}.$$

С помощью формулы (4) найдем теперь новый потенциал внешней сферы:

$$\phi'(R_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1 + q_2}{R_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2(R_2 - R_1)}{R_2^2}.$$

Поскольку потенциал внутренней сферы теперь равен нулю, энергия системы в конечном состоянии равна

$$W' = \frac{1}{2} q_2 \phi'(R_2) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q_2^2 (R_2 - R_1)}{R_2^2}.$$

Видно, что конечная энергия системы меньше начальной. Это и понятно. Уменьшение электростатической энергии системы равно тому количеству теплоты, которое выделилось при перезарядке.

Задача 4. Три концентрические проводящие сферы имеют радиусы R , $2R$ и $3R$. Внутренняя и внешняя сферы не заряжены, заряд средней сферы равен q . В некоторый момент внутреннюю и внешнюю сферы соединяют проволокой (рис. 4). Какой заряд пройдет по

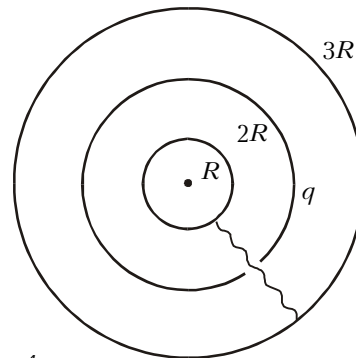


Рис. 4

этой проволоке, и какое при этом выделится количество теплоты?

Обозначим конечный заряд внешней сферы q' , тогда заряд внутренней сферы будет $-q'$. Применяя метод суперпозиции аналогично тому, как мы это делали в задаче 3, вычислим конечные потенциалы внутренней и внешней сфер и приравняем их друг другу. Потенциал внутренней сферы равен

$$\phi'(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{q'}{R} + \frac{q}{2R} + \frac{q'}{3R} \right)$$

(для вклада от всех трех сфер можно

¹ Заземляющая проволока проходит через маленькое отверстие во внешней сфере без контакта с ней.

применять формулу (2) или найти потенциал центра – аналогично задаче 1). Потенциал внешней сферы равен

$$\varphi'(3R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{q'}{3R} + \frac{q}{3R} + \frac{q'}{3R} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{3R}.$$

Приравнявая потенциалы, находим

$$q' = \frac{q}{4}.$$

Именно такой заряд и пройдет по проволоке с внутренней сферы на внешнюю.

Для ответа на второй вопрос воспользуемся законом сохранения энергии. Начальная энергия системы равна просто энергии средней сферы, т.е.

$$W = \frac{1}{2} q \varphi(2R) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2R}.$$

Конечная энергия системы равна

$$W' = -\frac{1}{2} q' \varphi'(R) + \frac{1}{2} q \varphi'(2R) + \frac{1}{2} q' \varphi'(3R) = \frac{1}{2} q \varphi'(2R)$$

(мы учли, что потенциалы внешней и внутренней сфер равны друг другу). Для конечного потенциала средней сферы запишем

$$\varphi'(2R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{q'}{2R} + \frac{q}{2R} + \frac{q'}{3R} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{11q}{24R}$$

(для вклада внутренней сферы применяем формулу (1), а для вклада внешней – формулу (2)). Окончательно, выделившееся количество теплоты будет равно

$$Q = W - W' = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{q^2}{2R} - \frac{11q^2}{24R} \right) = \frac{1}{192\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}.$$

В следующей задаче выясним, как изменяется потенциал проводящей сферы в присутствии точечного заряда.

Задача 5. Проводящая сфера радиусом R заряжена зарядом Q . Каким станет потенциал сферы, если на расстоянии l от ее центра поместить точечный заряд q ? Разобрать случаи $l > R$ и $l < R$.

На первый взгляд, эта задача гораздо труднее предыдущей, поскольку присутствие точечного заряда нарушает сферическую симметрию, и распределение заряда по поверхности сферы становится неравномерным. Действительно, получить полное описание, т.е.

найти распределение зарядов на сфере и поле вокруг нее, совсем не просто, хотя и возможно. Это можно сделать, например, с помощью метода электростатических изображений, неоднократно описанного на страницах «Кванта» (последний раз – в №1 за 1996 г.). Однако ответить на поставленный в задаче вопрос можно довольно просто, опираясь на симметрию сферы и теорему единственности.

Начнем со случая $l > R$ (рис. 5). В этом случае потенциалы всех точек сферы одинаковые, и достаточно найти потенциал какой-нибудь одной точ-

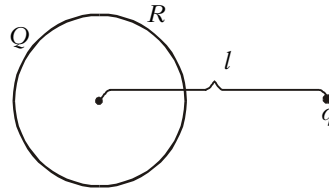


Рис. 5

ки. Ясно, что мы выберем центр сферы. Вклад зарядов, распределенных по поверхности сферы, вычисляется так же, как в задаче 1 (см. формулу (3)), и составляет $\sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta Q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum \Delta Q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$ (поскольку в этом вычислении никак не используется равномерность распределения заряда – ответ зависит только от полного заряда сферы). Остается учесть вклад точечного заряда и записать

$$\varphi(R) = \varphi(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l}. \quad (6)$$

Видно, что потенциал сферы при помещении рядом с ней точечного заряда изменился на величину потенциала, создаваемого этим зарядом в центре сферы. Во избежание недоразумений отметим, что существует *единственное* распределение зарядов по поверхности сферы, при котором потенциал *всех* внутренних точек сферы равен полученному значению.

Перейдем к случаю $l < R$ (рис. 6). Так как теперь заряд находится внутри сферы, напряженность поля внутри сферы не равна нулю и потенциалы различных точек не равны друг другу. Однако и в этом случае несложно определить потенциал сферы, только надо обратить внимание не на внутреннюю часть сферы, а на окружающее ее внешнее пространство. Оказывается, поле во внешнем пространстве не зависит от положения заряда q внутри сферы, т.е. при перемещении заряда по внутренней области поле во внешней области не меняется.

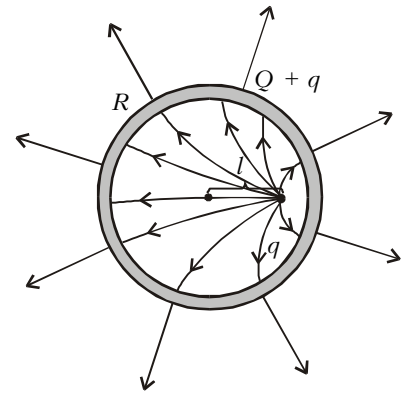


Рис. 6

Это утверждение верно для полого проводника любой формы, и следует оно из теоремы единственности. Поле во внешнем пустом пространстве однозначно определяется следующими условиями: 1) потенциал на бесконечности равен нулю; 2) потенциал на поверхности проводника принимает некоторое постоянное значение; 3) полный заряд внутри этой поверхности известен, т.е. известно полное число силовых линий, начинающихся на поверхности проводника. Существует единственное поле, удовлетворяющее этим условиям.

Для сферического проводника поле во внешней области совпадает с полем точечного заряда $Q + q$. При этом заряд на сфере распределится следующим образом: на внутренней поверхности сферы будет находиться заряд $-q$, поскольку здесь заканчиваются все силовые линии, начинающиеся на заряде q , а на внешней поверхности сферы равномерно распределится заряд $Q + q$. Следовательно, потенциал сферы в этом случае равен

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \quad (7)$$

и не зависит от расстояния l .

А теперь попробуем ответить на такой вопрос: чему будет равен потенциал проводящей сферы, несущей заряд Q , в присутствии двух точечных зарядов q_1 и q_2 , расположенных на расстояниях l_1 и l_2 от центра сферы ($l_1 < R < l_2$)? Может показаться, что здесь нельзя применить ни одно из рассуждений, использованных в случае только одного заряда. Действительно, для первой части задачи было важно, что напряженность поля внутри сферы равна нулю, а для второй – что вне сферы нет зарядов. Но теорема единственности позволяет ответить на поставленный вопрос с помощью суперпозиции рассмотренных выше двух случаев расположения заряда относительно сферы.

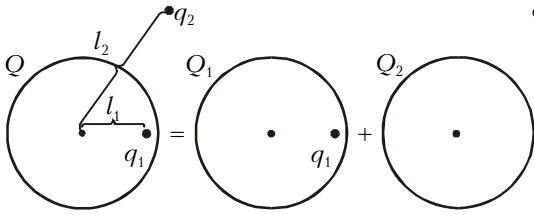


Рис. 7

Разобьем задачу на две части. Сначала рассмотрим заряд q_1 на расстоянии l_1 от сферы с зарядом Q_1 , а затем — заряд q_2 на расстоянии l_2 от сферы с зарядом Q_2 , при этом $Q_1 + Q_2 = Q$ (рис. 7). Потенциал сферы в первом случае определяется формулой (7), а во втором случае — формулой (6). А теперь наложим первую систему на вторую. Так как потенциалы всех точек сферы были постоянными в каждом из случаев, при наложении систем они тоже будут постоянными, а заряд сферы будет равен Q . Следовательно, полученное при наложении распределение зарядов по поверхности сферы и будет правильным (теорема единственности). Для потенциала сферы получим

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{l_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R}.$$

Этот результат естественным образом обобщается на любое количество точечных зарядов. Интересно отметить, что отсюда следует своеобразная экви-

валентность точечных зарядов и заряженных сфер в задаче, где требуется определить потенциал проводящей сферы. Поскольку вклад от точечного заряда в потенциал сферы зависит только от расстояния l между этим зарядом и центром сферы, потенциал сферы не изменится, если мы «размажем» этот заряд по поверхности воображаемой сферы радиусом l . Сравните, например, формулу (5) с формулой (6), а формулу (4) с формулой (7).

Задача 6. Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$). Между сферами на расстоянии r от центра находится точечный заряд q . Какие заряды появятся на сферах, если их заземлить?

Выразим потенциалы сфер и приравняем их к нулю. Потенциал внутренней сферы равен потенциалу центра, т.е.

$$\varphi(R_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2},$$

где q_1 и q_2 — заряды сфер (после заземления). Поле во внешнем пространстве совпадает с полем точечного заряда $q_1 + q + q_2$, поэтому потенциал внешней сферы равен

$$\varphi(R_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q + q_2}{R_2}.$$

Теперь приравняем потенциалы обеих

сфер к нулю, решим полученные уравнения и найдем искомые заряды:

$$q_1 = -q \frac{\frac{R_2}{r} - 1}{\frac{R_2}{R_1} - 1}, \quad q_2 = -q \frac{1 - \frac{R_1}{r}}{1 - \frac{R_1}{R_2}}.$$

Упражнения

1. Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$). Внутренняя сфера заряжена зарядом q , внешняя сфера не заряжена. Каким станет потенциал внутренней сферы, если внешнюю сферу заземлить? Как изменится при этом энергия системы?

2. Имеются три концентрические проводящие сферы радиусами R_1 , R и R_2 ($R_1 < R < R_2$). Среднюю сферу заряжают зарядом q , а внутреннюю и внешнюю сферы заземляют. Какие заряды появятся на этих сферах?

3. На расстоянии l от центра заземленной проводящей сферы радиусом R помещают точечный заряд q . Какой заряд появится на сфере?

4. Проводящую сферу радиусом R заземляют, а на расстояниях $l_1 < R$ и $l_2 > R$ от ее центра помещают точечные заряды q_1 и q_2 . Какой заряд появится на сфере?

5. Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами R и $3R$. Между сферами на расстоянии $2R$ от их центра находится точечный заряд q . Какие заряды окажутся на сферах, если их соединить тонкой проволокой?