



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 6 - 1998 г.

Материалы вступительных экзаменов 1998 года

Московский Физико-технический институт

**Московский государственный институт
электроники и математики**

**Московский государственный
педагогический университет**

© Квант

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!
<http://www.techno.ru/vivovoco>

Материалы вступительных экзаменов 1998 года

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\frac{\cos 3x}{|\cos x|} + \frac{2 \cos x}{\cos 3x} = -1.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{3x^2 - 8x - 3} > \frac{1 - 2x}{3}.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена медиана CD . В треугольник BCD вписана окружность, а около треугольника ACD описана окружность. Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если $BC = 3$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $\frac{5}{2}$.

4. Фигура M на плоскости (x, y) ограничена графиками функций $y = 9e^{-ax}$ и $y = 15 - 4e^{ax}$ и имеет единственную общую точку с прямой $y = -18x + 9$. Найдите a и площадь фигуры M .

5. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ пересечена плоскостью, проходящей через середины ребер AB , A_1C_1 , BB_1 . Постройте сечение призмы, найдите площадь сечения и вычислите угол между плоскостью основания ABC и плоскостью сечения, если сторона основания равна 2, а высота призмы равна $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

6. Найдите все пары целых чисел x, y , при которых является верным равенство

$$x^3 - xy - 7x + 2y + 23 = 0.$$

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(x^2y + 2xy^2) - \log_1\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right) = 4, \\ \log_5\left|\frac{xy}{6}\right| = 0. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt[4]{\frac{5 + 3 \cos 4x}{8}} > -\sin x.$$

3. Сторона ромба $ABCD$ равна 6. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и BCD , равно 8. Найдите радиусы этих окружностей.

4. Найдите все значения a , при которых уравнение $\sin x = (4a - 2)^2$ имеет корни, а числа $\frac{1 - 4a}{27a^4}$ являются целыми.

5. Две противоположные боковые грани четырехугольной пирамиды $SABCD$ перпендикулярны основанию, высота пирамиды равна $\sqrt{5}$. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD = BC$), описанная около окружности и такая, что $AB = 6$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$. Найдите расстояние от точки D до плоскости SAB .

Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SCD , а вершина принадлежит грани SAB . Найдите объем конуса.

6. График функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, $c < 0$, пересекает ось ординат в точке A и имеет ровно две общие точки M и N с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке M , проходит через точку A . Найдите a, b, c , если площадь треугольника AMN равна 1.

Письменный экзамен

Вариант 1

1. К концам троса, перекинутого через блок, привязаны бруски с массами m и $M = 4m$, находящиеся на гладкой наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$ (рис.1). При каком минимальном значении коэффициен-

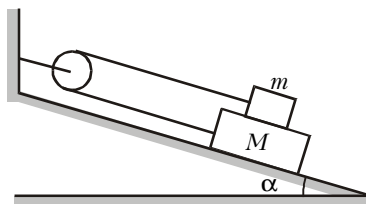


Рис. 1

та трения между брусками они будут покоиться?

2. «Тройник» из трех вертикальных открытых в атмосферу трубок полностью заполнен водой (рис.2). После того как тройник стали двигать в гори-

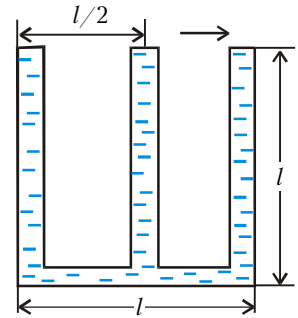


Рис. 2

зонтальном направлении (в плоскости рисунка) с некоторым ускорением, из него вылилось $9/32$ всей массы содержавшейся в нем воды. Чему равна величина ускорения a ? Внутренние сечения трубок одинаковы, длины трубок равны l . Внутренний диаметр трубок мал по сравнению с их длиной.

3. Моль гелия совершает работу величиной A в замкнутом цикле (рис.3),

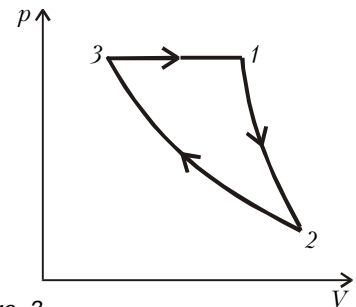


Рис. 3

состоящем из адиабаты $1-2$, изотермы $2-3$, изобары $3-1$. Найдите величину работы, совершенной в изотермическом процессе, если разность максимальной и минимальной температур газа в цикле равна ΔT .

4. В электрической схеме, параметры которой указаны на рисунке 4, в начальный момент ключи K_1 и K_2 разомкнуты. Вначале замыкают ключ K_1 . Когда ток через катушку индуктивности достигает значения I_0 , замыкают ключ K_2 . Определите: 1) напряжение на катушке индуктивности сразу после

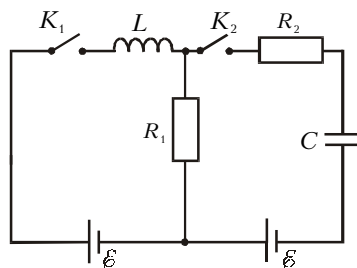


Рис. 4

закрывания ключа K_2 ; 2) напряжение на конденсаторе в установившемся режиме. Внутреннее сопротивление батарей не учитывать.

5. Два луча симметрично пересекают главную оптическую ось собирающей линзы на расстоянии $a = 7,5$ см от

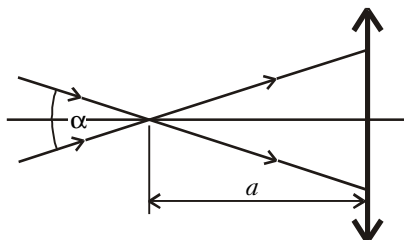


Рис. 5

линзы под углом $\alpha = 4^\circ$ (рис.5). Определите угол между этими лучами после прохождения ими линзы, если фокусное расстояние линзы $F = 10$ см.

Вариант 2

1. Однородный гибкий канат массой m и длиной $L = 75$ см прикреплен к бруску массой $2m$, находящемуся на горизонтальной поверхности стола (рис.6). Со стола свешивается половина длины каната. Коэффициент трения

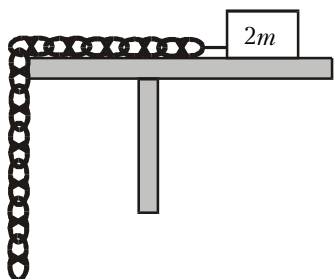


Рис. 6

скольжения бруска о стол $\mu = 0,15$. Трением между канатом и столом пренебречь. Брусок удерживают в покое, а затем отпускают. 1) Найдите ускорение бруска в начале движения. 2) Найдите скорость бруска в момент, когда канат соскользнет со стола.

2. Воздух состоит в основном из азота и кислорода. Концентрация молекул азота при этом в $\alpha = 4$ раза больше концентрации молекул кислорода. Чему равна кинетическая энер-

гия вращения молекул азота, содержащегося в комнате объемом $V = 60 \text{ м}^3$? Атмосферное давление $p = 10^5$ Па.

Указание. Внутренняя энергия моля двухатомного газа равна $5/2RT$, где R – газовая постоянная, T – температура; она возрастает по сравнению с энергией одноатомного газа за счет кинетической энергии вращения молекул.

3. Три тонкие незаряженные металлические пластины площадью S каж-

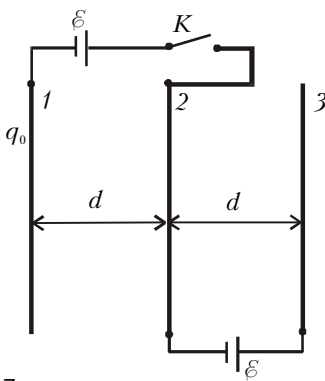


Рис. 7

дая расположены на расстояниях d друг от друга, причем d много меньше размеров пластин. К пластинам 2 и 3 подсоединили батарею с ЭДС ε (рис.7). Пластины 1 и 2 через ключ K можно подсоединить к батарее с ЭДС ε . Пластина 1 сообщили заряд q_0 и замкнули ключ K . 1) Определите заряд пластины 3 до сообщения пластине 1 заряда q_0 . 2) Определите заряд пластины 3 после замыкания ключа K .

4. В схеме, изображенной на рисунке 8, сверхпроводящие катушки с индуктивностями L_1 и L_2 соединены последовательно с конденсатором емкостью C . В начальный момент ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсатор заряжен до напряжения U_0 . Сначала замыкают ключ K_1 , а после того, как напряжение на конденсаторе станет равным нулю, замыкают ключ K_2 . Через некоторое время после замыкания ключа K_2 конденсатор перезарядится до некоторого максимального напряжения U_m . 1) Найдите ток через катушки индуктив-

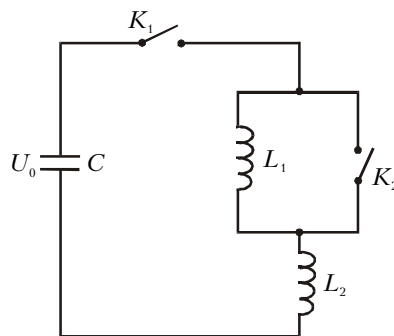


Рис. 8

ности непосредственно перед замыканием ключа K_2 . 2) Найдите напряжение U_m .

5. Маленький грузик массой m на пружине жесткостью k совершает гармонические колебания относительно главной оптической оси тонкой плоско-

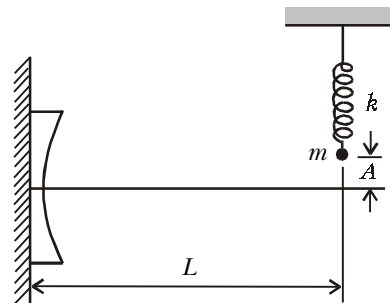


Рис. 9

вогнутой линзы с фокусным расстоянием $-F$ ($F > 0$). Линза плотно прижата к вертикально расположенному плоскому зеркалу (рис.9). Расстояние от грузика до зеркала $L = 4,5F$. 1) На каком расстоянии от зеркала находится изображение грузика в данной оптической системе? 2) С какой скоростью изображение грузика пересекает главную оптическую ось линзы, если амплитуда его колебаний равна A ?

Публикацию подготовили
В.Трушин, Ю.Чешев, М.Шабунин

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты электроники, информатики и телекоммуникаций, автоматики и вычислительной техники)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{3x+2} \geq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x-4}.$$

2. Решите уравнение

$$6 \log_9(3x-6) = \log_3^2(x-2) - 1.$$

3. Решите уравнение

$$|4 \sin 4x + \operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x = 0.$$

4. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC , у которого $AB = BC = 15$, $AC = 24$. Все боковые грани

(Окончание см. на с. 34)

(Начало см. на с. 30)

образуют с основанием угол 45° . Найдите объем пирамиды.

5. Может ли функция $f(x) = \frac{\sqrt{3} \cos x + 1}{3 + \sin x}$ принимать значение 1?

Найдите все значения, которые может принимать функция $f(x)$.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и экономико-математический)

1. Решите неравенство

$$\log_2(x+5) > -2\log_2\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

2. Решите уравнение

$$|1 + 2\sin x + \cos x| + \cos x = 0.$$

3. Решите относительно x уравнение

$$\frac{ax+3}{x+1} = \frac{x+3}{ax+2}.$$

4. В правильной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 1 и высота равна $\sqrt{8}$. Точка N лежит на ребре SD и делит это ребро в отношении $DN : NS = 1 : 2$, точка M – середина ребра AS . Найдите расстояние от вершины D до плоскости, проходящей через точки M и N параллельно ребру DC .

5. Найдите все значения a , при которых уравнение $\sqrt{x+2} = ax + 9a - 3$ имеет единственное решение.

Задачи устного экзамена

1. Мяч бросают горизонтально со скоростью $v_0 = 14$ м/с с горы, составляющей угол $\alpha = 45^\circ$ с горизонтом. На каком наибольшем расстоянии от поверхности горы окажется мяч во время полета? Где он приземлится?

2. На горизонтальной пружине укреплено тело массой $M = 10$ кг, лежащее на абсолютно гладком столе. В это тело попадает и застревает в нем пуля массой $m = 10$ г, летящая со скоростью, равной $v = 500$ м/с и направленной вдоль оси пружины. Тело вместе с застрявшей в нем пулей начинает колебаться с амплитудой $A = 10$ см. Найдите период колебаний.

3. Два одинаковых сосуда, содержащих одно и то же число молекул азота, соединены краном. В первом сосуде средняя квадратичная скорость молекул равна $v_1 = 400$ м/с, а во втором – $v_2 = 500$ м/с. Какая установится скорость, если открыть кран, соединяющий сосуды?

4. Барометрическая трубка опущена в сосуд с ртутью. Столб ртути в трубке имеет высоту $h_1 = 40$ мм, а столб воздуха над ртутью – $h_2 = 19$ см. На сколько надо опустить трубку, чтобы уровни ртути в трубке и сосуде оказались одинаковыми? Ртуть в ртутном барометре находится на высоте $H = 76$ см.

5. До какого потенциала можно зарядить уединенный металлический шарик радиусом $r = 5,0$ мм? Какой заряд он при этом будет нести? Напряженность поля, при которой наступает пробой воздуха, равна $E = 3,0$ МВ/м.

6. При силе тока $I_1 = 10$ А электродвигатель развивает мощность $P_1 = 0,50$ кВт, при $I_2 = 20$ А – мощность $P_2 = 0,80$ кВт. Определите КПД двигателя при данных значениях тока. Какой силы ток будет течь через обмотку якоря, если электромотор заклинит?

7. Заряженный конденсатор замкнули на катушку индуктивности. Через какое время (в долях периода T) после подключения энергия конденсатора будет равна энергии катушки индуктивности?

8. Длина линии электропередачи $L = 600$ км. Чему равна разность фаз напряжения на этом расстоянии? Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, частота переменного тока $\nu = 50$ Гц.

9. Два взаимно перпендикулярных луча идут из воздуха в жидкость. Каков показатель преломления жидкости, если один луч преломляется под углом $\beta_1 = 36^\circ$, а другой – под углом $\beta_2 = 20^\circ$?

10. Уединенный шарик радиусом $r = 0,50$ см осветили светом с длиной волны $\lambda_1 = 250$ нм. Сколько электронов покинет шарик, если его дополнительно осветить светом с длиной волны $\lambda_2 = 200$ нм? Постоянная Планка $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Публикацию подготовили
Ю.Сезонов, В.Тонян

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_{\sqrt{2} \sin x} (1 + \cos x) = 2.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{3 \log_{0,5} x}{2 - \log_{0,5} x} \geq 2 \log_{0,5} x + 1.$$

3. Бригада рыбаков должна была выловить по плану 600 ц рыбы к определенному сроку. В течение первых четырех дней рыбаки перевыполняли дневную норму на 5 ц, а в последние дни – на 6 ц, и уже за два дня до срока для выполнения плана им осталось выловить 6 ц рыбы. Сколько центнеров рыбы выловила бригада за первые 10 дней лова?

4. Все ребра пирамиды $MABCD$ равны a . Точка P лежит на ребре MC , причем $CP : PM = 1 : 3$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку P перпендикулярно прямой MC .

5. Внутри угла, равного 30° , расположена точка A на расстояниях 2 см и 4 см от сторон угла. Найдите наименьшую площадь треугольника, отсекаемого от угла прямой, проходящей через точку A .

Вариант 2

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$2|\cos x| + \log_{\text{ctg} x} \left(-\frac{|\sin x|}{\cos x} \right) = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_x \log_3 (10 - 9^x) \geq 1.$$

3. Три машинистки начали работу одновременно. Ежедневная норма первой машинистки относится к норме второй, как 5 : 4, а второй к третьей, как 2 : 1,2. Первая машинистка ежедневно перевыполняла норму на 10%, вторая – на 20%, третья – на 10%. В результате за 8 дней первая машинистка напечатала на 14 страниц больше второй. Сколько страниц напечатала каждая машинистка за 8 дней?

4. Все ребра тетраэдра $ABCD$ равны a , точка M лежит на ребре AD так, что $AM : MD = 3 : 1$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно ребру AD , и найдите площадь этого сечения.

5. В равнобедренный треугольник со сторонами 15 см, 15 см и 18 см вписан параллелограмм так, что угол при основании у них общий. Какими должны быть стороны параллелограмма, чтобы его площадь была наибольшей?

Вариант 3

(физический факультет)

1. В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под

углом α , вписан шар радиуса r . Найдите объем конуса.

2. Решите уравнение

$$\sin 5x + \sin 3x = \sin 4x.$$

3. Решите неравенство

$$\lg 2 + \lg(2x - x^2) > \lg(1 + x^2).$$

4. Решите уравнение

$$5^{x-1} + 5 \cdot 0,2^{x-2} = 26.$$

5. Напишите уравнение касательной к параболы $y = x^2 - 6x$, проходящей через ее вершину.

Вариант 4

(химический факультет)

1. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно d и наклонено к плоскости основания под углом β . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2. Решите уравнение

$$(1 + \cos 4x) \sin 2x = \cos^2 2x.$$

3. Решите неравенство

$$0,5^{\frac{2x-7}{x+3}} > \frac{1}{8}.$$

4. Решите уравнение

$$\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 + \lg(1/x).$$

5. На графике функции $f(x) = x(x-4)^3$ найдите точки, в которых касательная параллельна оси абсцисс.

Вариант 5

(факультет технологии и предпринимательства)

1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а высота — 4 см. Найдите боковую поверхность усеченной пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, параллельной ее основанию и отстоящей от него на 1 см.

2. Решите уравнение

$$\sin(x-1) = \sin x - \sin 1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2 \frac{3x+1}{x+1} > 0.$$

4. Решите уравнение

$$x^{(\log_3 x)-4} = \frac{1}{27}.$$

5. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = (x+2)^2 - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

Задачи устного экзамена

(математический факультет)

1. Вычислите

$$\log_{0,5} \left| (0,25^{0,25} - \sqrt{2}) \cdot \left(4^{-0,25} + (\sqrt{8})^{\frac{1}{3}} \right) \right|.$$

2. Вычислите

$$\frac{\cos 20^\circ + \sin 50^\circ - \cos 80^\circ}{\sqrt{1 + \cos 280^\circ}}.$$

3. Вычислите $\log_{abc} x$, если известно, что $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 6$.

4. Постройте график

$$y = |\sin x| \cdot \operatorname{ctg} x.$$

5. Постройте график

$$y = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{3}x + 3} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3}.$$

6. Постройте график

$$y = 5^{\left| \log_{\frac{1}{5}} x \right|}.$$

7. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны равны 2 и 3, а угол между диагоналями равен 120° .

8. Основания трапеции равны 3 м и 4 м. Найдите длину отрезка, параллельного основаниям трапеции и делящего ее на две трапеции одинаковой площади.

9. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если переставить его цифры, то получится число, составляющее $4/7$ первоначального. Найдите его.

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x \cdot y^2 + 2^{2-y} = 2^{x+2} + y^2 \cdot 2^{-y}, \\ y = x^2. \end{cases}$$

11. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{5} \right)^x \leq 5^{\frac{x-6}{x-2}}, \\ \sqrt{x^2} < 16. \end{cases}$$

12. Решите неравенство

$$|x-1| + |2-x| \geq x+3.$$

13. Решите уравнение

$$2 \sin x \sin 3x + 4 \cos 2x = 3.$$

14. Решите уравнение

$$4^{2-|2x+3|} + 31 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{|2x+3|} = 2.$$

15. При каком значении a максимум функции $f(x) = ax^2 + 2ax + 2a^2 + 1$ равен 2?

Задачи устного экзамена

1. Груз какой массы нужно положить на плоскую льдину, чтобы она полностью погрузилась в воду? Площадь льдины 5 м^2 , толщина 20 см . Плотность льда $0,9 \text{ г/см}^3$.

2. Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось на землю через 5 с . Какова была начальная скорость тела? На какую высоту оно поднялось? Сопротивление воздуха не учитывать.

3. С горы высотой $2,5 \text{ м}$ и основанием 5 м съезжают сани и, пройдя по горизонтальному участку 40 м , останавливаются. Определите коэффициент трения.

4. Лифт поднимается с первого этажа равноускоренно на высоту 12 м в течение 4 с . Определите вес груза массой 60 кг , находящегося в лифте.

5. В баллоне содержится 15 л газа при температуре 27°C и давлении $2 \cdot 10^4 \text{ Па}$. Чему равен объем этой массы газа при нормальных условиях?

6. В сосуд, содержащий 1 кг воды при 20°C , впускают 100 г водяного пара при 100°C . Какая температура установится в сосуде? Удельная теплостойкость воды $4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$, удельная теплота парообразования воды $2,3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$.

7. Определите напряженность электрического поля в точке, в которой на заряд $2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$ действует сила $6 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$. Определите величину заряда, создающего это поле, если рассматриваемая точка удалена от него на 12 см .

8. Два электронагревателя, сопротивления которых 20 Ом и 10 Ом , находятся под напряжением 200 В . Какое количество теплоты выделится нагревателями при их последовательном и параллельном соединениях в течение 5 минут ?

9. Под каким углом должен упасть луч на стекло, чтобы преломленный луч оказался перпендикулярным отраженному? Показатель преломления стекла $1,8$.

10. Возникнет ли фотоэффект в цинке под действием излучения, имеющего длину волны $0,45 \text{ мкм}$? Постоянная Планка $6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$, работа выхода электронов из цинка $3,74 \text{ эВ}$.

Публикацию подготовили
Г.Брайчев, Б.Кукушкин,
Е.Пантелеева, М.Чистова