



№ 6, 2001 г. / Варианты

Материалы вступительных экзаменов 2001 г.

*Московский физико-технический институт
Московский государственный институт электроники и математики
Московский педагогический государственный университет*

© “Квант”

Использование и распространение этого материала
в коммерческих целях возможно лишь с разрешения редакции



Сетевая образовательная библиотека “VIVOS VOCO!”
(грант РФФИ 00-07-90172)

vivovoco.nns.ru
vivovoco.rsl.ru
www.ibmh.msk.su/vivovoco

ВАРИАНТЫ

Материалы вступительных экзаменов 2001 года

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+y+1} + 7 \cdot 2^{y-5} = 4, \\ \sqrt{2x+y^2} = x+y. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos^3 x \sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos 2x} = 3 \sin 2x \cos x.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{2 - \sqrt{x^2 - 3x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}.$$

4. Через точку A проведены две прямые: одна из них касается окружности в точке B , а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что точка C лежит на отрезке AD . Найдите AC , BC и радиус окружности R , если

$$BD = 5, \quad \angle BAC = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \angle BDC = \arccos \sqrt{\frac{5}{21}}.$$

5. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами

поставлено гранью ABC на плоскую поверхность. Точка F — середина ребра CD , точка S лежит на прямой AB , $2AB = BS$ и точка B лежит между A и S . В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F , чтобы пройденный им путь был минимальным?

6. Сторона основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна $8\sqrt{3}$, высота пирамиды $DO = 6$. Точки A_1 , B_1 , C_1 — середины ребер AD , BD , CD соответственно. Найдите 1) угол между прямыми BA_1 и AC_1 ; 2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1 ; 3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1 , BA_1 и CB_1 .

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 8x + 25} - \sqrt{x^2 - 4x + 13} = 2.$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 3x = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{20-2x}(99 - 2x - x^2) + \log_{\sqrt{99-2x-x^2}}(20 - 2x) \leq 3.$$

4. В треугольнике ABC таком, что $AB = BC = 6$ и $AC = 2$, проведены медиана AA_1 , высота BB_1 и биссектриса CC_1 . Найдите площадь треугольника, образованного пересечением прямых 1) BB_1 , CC_1 и BC ; 2) AA_1 , BB_1 и CC_1 .

5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} y^2 + 3xy + 1 \leq 0, \\ 9x^2 - 12x - 8y \leq 0. \end{cases}$$

6. Три шара радиуса r касаются друг друга внешним образом и каждый шар касается внутренним образом сферы радиуса R . При каком соотношении между r и R это возможно? Найдите радиус наименьшего из шаров, касающихся трех шаров радиуса r внешним образом, а сферы радиуса R внутренним образом.

Вариант 3

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 + 4x + 3} < 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 4x + \sin 3x - \sin 2x - \sin x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x} = \frac{|\cos 2x|}{\sqrt{2} \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

3. Окружность C_1 радиуса $2\sqrt{3}$ с центром O_1 и окружность C_2 радиуса $\sqrt{3}$ с центром O_2 расположены так, что $O_1O_2 = 2\sqrt{13}$. Прямая l_1 касается окружностей в точках A_1 и A_2 , а прямая l_2 — в точках B_1 и B_2 . Окружности C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой l_1 и по разные стороны от прямой l_2 , $A_1 \in C_1$, $B_1 \in C_1$, $A_2 \in C_2$, $B_2 \in C_2$, точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны прямой O_1O_2 . Через точку B_1 проведена прямая l_3 , перпендикулярная прямой l_2 . Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке A , а прямую l_3 — в точке B . Найдите A_1A_2 , B_1B_2 и стороны треугольника ABB_1 .

4. Страна основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 1, боковое ребро образует с основанием угол, равный $\arctg 4$. Точки E , F , K выбраны на ребрах AB , AD и SC соответственно так, что $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{SK}{SC} = \frac{2}{3}$. Найдите

1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK ; 2) расстояние от точки D до плоскости EFK ; 3) угол между прямой SD и плоскостью EFK .

5. Найдите все a , при которых уравнение

$$\log_3(x + \sqrt{5 - a}) + \log_{1/3}(a - 2 - x) = \log_9 4$$

имеет решение.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - 5z - 2yz = 0, \\ x - 5y - z - 2z^2 = 0, \\ x + 9y - 3z + 2xz = 0. \end{cases}$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На горизонтальной поверхности стола постоит чаша с небольшой по сравнению с размерами чаши шайбой массой m (рис.1). Нижняя часть AB внутренней поверхности чаши есть часть сферы радиусом R . Глубина чаши $H = 3R/5$, ее внутренняя поверхность гладкая. Шайба начинает скользить без начальной скорости и при движении не отрывается от чаши, а чаша остается в покое. Шайба достигает точки C , для которой угол между радиусом OC и вертикалью равен α ($\cos \alpha = 4/5$). 1) Найдите скорость шайбы в точке C .

2) Найдите силу трения между чашей и столом при прохождении шайбой точки C .

2. Температура гелия уменьшилась в $k = 3$ раза в процессе $pV^2 = \text{const}$ (здесь p — давление газа, V — его объем). При этом его внутренняя энергия изменилась на 50 Дж. Найдите: 1) максимальное давление газа p_{max} ; 2) объем газа V_2 в конечном состоянии. Минимальное давление газа в этом процессе составило $p_{\text{min}} = 10^5$ Па.

3. В электрической цепи, представленной на рисунке 2, диоды D_1 и D_2 идеальные. Считая параметры элементов

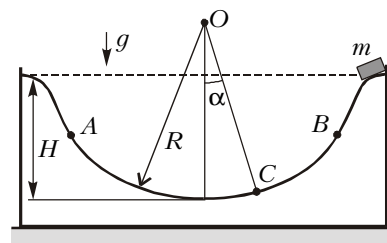


Рис. 1

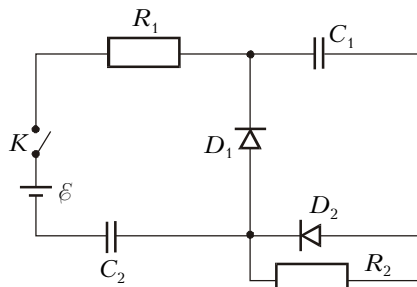


Рис. 2

цепи известными, определите: 1) ток через батарею сразу после замыкания ключа K ; 2) количество теплоты, выделившееся в схеме после замыкания ключа. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

4. Проводник массой M и длиной l подвешен за концы к непроводящему потолку с помощью двух одинаковых проводящих пружинок, каждая жесткостью k (рис.3). К верхним концам пружинок подсоединен конденсатор емкостью C . Вся конструкция находится в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной плоскости конструкции. Проводник смещают вниз на расстояние h от положения равновесия, а затем отпускают. Определите скорость проводника, когда он снова окажется в положении равновесия. Сопротивлением и самоиндукцией проводников пренебречь.

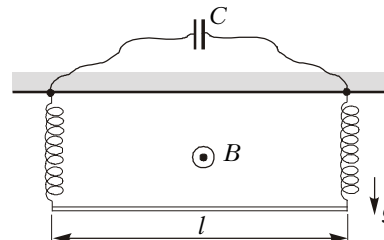


Рис. 3

5. Точечный источник света находится на главной оптической оси на расстоянии $d = 8$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 12$ см. Источник сместили вниз на расстояние $h = 4$ см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. На сколько и куда надо сместить линзу, чтобы изображение источника вернулось в старое положение?

Вариант 2

1. Ящик с шайбой удерживают в покое на наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 30^\circ$ (рис.4).

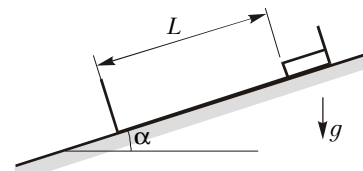


Рис. 4

Ящик и шайбу одновременно отпускают, и ящик начинает скользить по наклонной плоскости, а шайба — по дну ящика. Через время $t = 1$ с шайба ударяется о нижнюю стенку ящика. Коэффициент трения скольжения между шайбой и ящиком $\mu_1 = 0,23$, а между ящиком и наклонной плоскостью $\mu_2 = 0,27$. Масса ящика вдвое больше массы шайбы. 1) Определите ускорение шайбы относительно наклонной плоскости при скольжении шайбы по ящику. 2) На каком расстоянии L от нижней стенки ящика находилась шайба до начала движения?

2. В цилиндре под поршнем находятся 0,5 моля воды и 0,5 моля пара. Жидкость и пар медленно нагревают в изобарическом процессе так, что в конечном состоянии температура пара увеличивается на ΔT . Какое количество теплоты было подведено к системе жидкость — пар в этом процессе? Молярная теплота испарения жидкости в заданном процессе равна Λ . Внутренняя энергия ν молей пара равна $U = \nu \cdot 3RT$ (R — универсальная газовая постоянная).

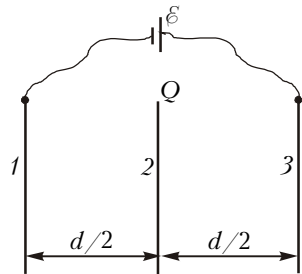


Рис. 5

3. Батарея с ЭДС ε подключена к удерживаемым неподвижно пластинам 1 и 3 плоского конденсатора (рис.5). Площадь пластин S , расстояние между ними d . Посередине между этими пластинами расположена закрепленная неподвижно металлическая пластина 2, на которой находится заряд Q . Пластины 1 и 2 отпускают. Какую работу совершит батарея к моменту соударения пластин 1 и 2? Силой тяжести и внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

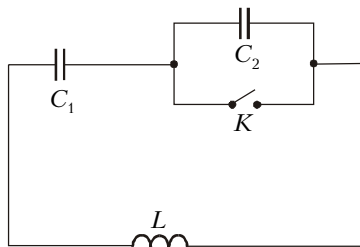


Рис. 6

4. При замкнутом ключе K в LC -контуре (рис.6) происходят незатухающие свободные колебания. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе емкостью C_1 максимально и равно U_1 , ключ размыкают. Определите максимальное значение тока в контуре после размыкания ключа. Параметры элементов схемы указаны на рисунке.

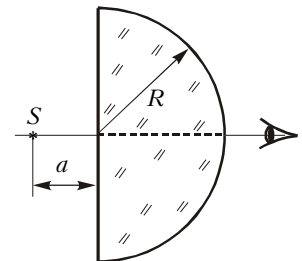


Рис. 7

5. Из стеклянной пластинки с показателем преломления $n = 1,5$ вырезали толстую линзу в форме полушара радиусом $R = 10$ см (рис.7). Через такую линзу рассматривается точечный источник света S , расположенный на расстоянии $a = R/2$ от плоской поверхности полушара. На каком расстоянии от этой поверхности наблюдатель видит изображение источника света? Указание: для малых углов $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$.

Публикацию подготовили М.Балашов, В.Можаев, Ю.Чешев, М.Шабунин

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты электроники, информатики
и телекоммуникаций, автоматики и вычислительной
техники)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+6}}{2x-3} < 1.$$

2. Решите неравенство

$$\log_4(3x-8) < \log_{\frac{1}{4}}(x-2) + \frac{3}{2}.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin y = \frac{7}{4}, \\ \cos^2 x + \sqrt{3} \cos y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

4. Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC = 6$; $AC = 4$) является нижним основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 6\sqrt{2}$. На ребрах AA_1 , B_1C_1 , AC взяты, соответственно, точки M , N , L так, что $A_1M = 2\sqrt{2}$, $B_1N = 3$, $CL = 1$. Через точку L проведена прямая, которая параллельна прямой MN и пересекает боковую грань C_1B_1BC в точке E . Найдите а) длину отрезка MN ; б) длину отрезка LE .

5. Найдите все значения a , при которых уравнение

$$(a+2)x^2 + (2a-1)x + a^2 - 5a - 4 = 0$$

имеет только целые корни.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики,
экономико-математический)

1. Решите неравенство

$$\frac{|4x-2|-9}{x-2} \leq 1.$$

2. Найдите все значения a , при которых система

$$\begin{cases} ax + 2y = 3a - 4, \\ (3a-1)x + (a+3)y = a^2 + 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

3. Решите уравнение

$$\log_3 \cos x = \log_3(2 + 3 \sin x) - 1.$$

4. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 9. Боковые ребра пирамиды равны $5\sqrt{3}$. На ребре AB взята точка D так, что $AD = 3$. Через точки C , D проведена плоскость α , перпендикулярная плоскости основания пирамиды. Требуется а) найти объем пирамиды $SABC$; б) определить, в каком отношении плоскость α делит объем пирамиды.

5. Найдите сумму всех корней уравнения

$$2 \cos 3x + 8|\sin x| - 7 = 0,$$

принадлежащих отрезку $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Тело массой m , брошенное под углом α к горизонту, при движении имело минимальную кинетическую энергию E . Найдите изменение импульса тела за все время движения.

2. Телу массой m , подвешенному на нити длиной l , сообщают направленную горизонтально начальную скорость v , в результате чего тело совершает колебания. Найдите силу натяжения нити в тот момент, когда скорость тела равна $v/2$.

3. Один моль идеального газа совершает замкнутый цикл, состоящий из изохоры 1–2, изобары 2–3 и прямой 3–1. Температуры в точках 1, 2 и 3 связаны соотношением $T_3 = 2T_2 = 3T_1$. Определите КПД цикла.

4. Водяной пар, находящийся в сосуде объемом $V = 10$ л при температуре $t = 100$ °C и давлении $p = 50$ кПа, изотермически сжимают. Во сколько раз уменьшился объем, если в конце процесса в сосуде содержалось $m = 1,45$ г воды?

5. Два конденсатора, заряженные от одного и того же источника, соединили первый раз одноименными полюсами, а второй – разноименными. При этом полная энергия электрического поля, запасенная в системе, во втором случае была вдвое меньше. Найдите отношение емкостей конденсаторов.

6. Электрон со скоростью v влетает в плоский конденсатор параллельно его обкладкам. Его импульс за время пролета через конденсатор возрастает вдвое. Определите, на сколько смещается электрон относительно первоначального направления, если к обкладкам конденсатора приложено напряжение U , расстояние между ними d . Заряд e и масса m электрона известны.

7. Аккумулятор с внутренним сопротивлением r был заряжен от источника с напряжением U током I . Какую максимальную полезную мощность можно получить от этого аккумулятора?

8. Проводник длиной $l = 0,5$ м и массой $m = 0,2$ кг лежит на горизонтальных рельсах. Если по проводнику пропустить ток $I = 4,0$ А, то он начинает двигаться в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 0,2$ Тл. Какую минимальную силу надо приложить к проводнику, чтобы он начал двигаться, если такое же по величине магнитное поле будет направлено горизонтально вдоль рельсов?

9. Колебательный контур, состоящий из конденсатора и катушки индуктивности, резонирует на длине волны λ . Через какое время после начала колебаний энергия, выделяемая в катушке индуктивности, в 4 раза больше энергии, запасенной в конденсаторе? В первый момент конденсатор полностью заряжен.

10. На газету кладут прозрачную пластину толщиной H , сделанную из материала, для которого угол полного внутреннего отражения равен α . На каком расстоянии от верхней поверхности пластины будут видны буквы, если на них смотреть сверху?

Публикацию подготовили
Ю. Колмаков, Г. Померанцева

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Три мотоциклиста стартуют одновременно из одной точки кольцевого шоссе в одном направлении. Первый мотоциклист впервые догнал второго, пройдя 4,5 круга после старта, а за полчаса до этого он впервые догнал третьего мотоциклиста. Второй мотоциклист впервые догнал третьего через три часа после старта. Сколько кругов в час проезжает первый мотоциклист?

2. Решите уравнение

$$|9 \sin^2 x + 8 \cos 2x| = |5 + 3 \cos x|$$

и укажите число его решений на промежутке $\left[-\frac{\pi}{4}; 3\pi\right]$.

3. Решите неравенство

$$\log_{x+1} \frac{5x+4}{x+3} \leq \log_{x+1} \frac{x+2}{1-x}.$$

4. Из всех прямоугольных параллелепипедов с периметром каждой боковой грани 6 найдите параллелепипед наибольшего объема. В ответе укажите объем.

5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро равно 2. Найдите расстояние от центра грани $A_1 B_1 C_1 D_1$ до плоскости, проходящей через вершины B , D и C_1 .

Вариант 2

(физический факультет)

1. В правильную треугольную пирамиду, сторона основания которой равна a , вписан конус. Найдите объем конуса, если угол между ребром пирамиды и плоскостью основания равен α .

2. Решите уравнение

$$2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2.$$

3. Решите неравенство

$$\log_3 \frac{1-2x}{x} \leq 0.$$

4. Найдите сумму корней уравнения

$$x^{3-\lg x} = 100.$$

5. Найдите угол, который образует с осью ординат касательная к кривой $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{x^3}{9}$, проведенная в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Вариант 3

(химический факультет)

1. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с основанием 6 и высотой 9. Каждое боковое ребро равно 13. Найдите объем пирамиды.

2. Решите уравнение

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} x} = 2 \sin x.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{x+27}{16-2x} < x.$$

4. Решите уравнение

$$\log_2(9 - 2^x) = 3 - x.$$

5. Составьте уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1} \text{ в точке с абсциссой } x_0 = 1.$$

Вариант 4

(факультет технологии и предпринимательства)

1. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 4, 4, $2\sqrt{2}$. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем пирамиды.

2. Решите уравнение

$$\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x.$$

3. Решите неравенство

$$4^x < 2^{x+1} + 3.$$

4. Решите уравнение

$$\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0.$$

5. Найдите максимумы функции

$$f(x) = \frac{20x}{x^2 + 1}.$$

Задачи устного экзамена

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$2 \cos \frac{\pi - t}{2} \sin \frac{4\pi + 3t}{2} = 7 - 8 \cos^2 \frac{2\pi + t}{2}.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{4t^2 - 4t + 1} \geq 2(1 - |t - 1|).$$

3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \left(\frac{125}{27} \right)^{2x-1} \left(\frac{9}{25} \right)^{x^2} < 0,6^{-1}, \\ \sqrt{x^2} \leq 3. \end{cases}$$

4. Найдите все значения
- l
- , при которых неравенство

$$2lx^2 + (2l + 10)x + 13l + 5 > 0$$

выполняется при всех x .

5. Вычислите

$$\frac{1}{\log_{c^2b^{-1}} c^2} - 3 \log_{\sqrt{b}} c^2 b^{1/3}, \text{ если } \log_{bc} cb^{0,25} = \frac{7}{22}.$$

6. Вычислите

$$\log_2 \left| \frac{\cos \frac{30t - 3\pi}{5} \cos \frac{10t - \pi}{5} \sin \frac{10t - \pi}{5}}{\sin \frac{30t - 3\pi}{5} \cos \frac{20t - 2\pi}{5} + 2 \sin 5t \cos 5t} \right|.$$

7. Найдите
- $\sin 4x$
- , если
- $\operatorname{tg}(x - 45^\circ) = -2$
- .

8. Найдите
- $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$
- , где
- x_1, x_2
- корни уравнения

$$2x^2 + 4x - 1 = 0.$$

9. При каких значениях
- l
- сумма кубов корней уравнения
- $x^2 + x + l = 0$
- равна
- -25
- ?

10. Постройте график функции

$$y = \operatorname{tg}(\pi - x) \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

11. Постройте график функции

$$y = \sqrt{(|x+1| - |x-1|)^2} - 1.$$

12. Постройте график функции

$$y = \left| 2^{\log_8 x^3} - 1 \right|.$$

13. Разность цифр двузначного числа равна 3. Если цифры переставить, то получится число, составляющее 1,75 первоначального. Найдите исходное число.

14. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6. Двугранный угол между основанием и боковой гранью равен 45° . Найдите объем пирамиды и площадь ее боковой поверхности.

ФИЗИКА*Задачи устного экзамена*

1. Стрела выпущена вертикально вверх с начальной скоростью 39,2 м/с. Определите координату и скорость стрелы через 2 с.

2. Какую скорость должен иметь искусственный спутник, чтобы обращаться вокруг Земли по круговой орбите на высоте 600 км над поверхностью Земли? Радиус Земли 6400 км, масса Земли $6 \cdot 10^{24}$ кг.

3. Чтобы охладить 0,2 кг воды, взятой при 23°C , до 8°C , в нее бросают мелкие кусочки льда, имеющие температуру 0°C . Какое количество льда потребуется для охлаждения воды? Удельная теплоемкость воды $4,2$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

4. В комнате объемом 40 м^3 при температуре 20°C относительная влажность воздуха составила 20%. Какую массу воды нужно испарить для увеличения относительной влажности воздуха до 50%? Плотность насыщенного водяного пара при 20°C равна $17,3 \cdot 10^{-3}$ кг/м³.

5. Два одинаковых металлических шарика заряжены так, что заряд одного из них в 5 раз больше другого. Шарик привели в соприкосновение и раздвинули на прежнее расстояние. Во сколько раз (по модулю) изменилась сила взаимодействия шариков, если шарик были заряжены разномненно?

6. Источник с ЭДС 2,0 В и внутренним сопротивлением 0,8 Ом замкнут никелиновой проволокой длиной 2,1 м и сечением $0,21 \text{ мм}^2$. Каково напряжение на зажимах источника? Удельное электрическое сопротивление никелина $0,42 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$.

7. В магнитном поле с индукцией 0,02 Тл протон описал окружность, радиус которой 0,1 м. Найдите скорость протона.

8. Высота Солнца над горизонтом 40° . Под каким углом к горизонту следует расположить плоское зеркало, чтобы солнечными лучами осветить дно вертикального колодца?

9. Свет какой частоты следует направить на поверхность платины, чтобы максимальная скорость фотоэлектронов была 3000 км/с? Работа выхода электронов из платины 10^{-18} Дж. Постоянная Планка $6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, масса электрона $9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

10. Найдите энергию и импульс фотона для инфракрасных лучей с частотой 10^{12} Гц. Скорость света $3 \cdot 10^8$ м/с, постоянная Планка $6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Публикацию подготовили С.Жданов, Б.Кукушкин, Е.Пантелева, М.Чистова, Г.Шадрин