



№ 4, 2001 г. / Практикум абитуриента

В. Можаяев

Магнитные явления

© “Квант”

Использование и распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции



Сетевая образовательная библиотека “VIVOS VOCO!”
(грант РФФИ 00-07-90172)

vivovoco.nns.ru
vivovoco.rsl.ru
www.ibmh.msk.su/vivovoco

Магнитные явления

В. МОЖАЕВ

КАК ИЗВЕСТНО, ОСНОВНЫМ фундаментальным (а значит, полученным из экспериментов) законом в электростатике является закон Кулона – закон электрического взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на некотором расстоянии друг от друга. Силовой характеристикой электростатического поля служит вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$. (Заметим, что из закона Кулона вытекает основная теорема электростатики – теорема Гаусса, которая устанавливает связь между потоком напряженности электрического поля через замкнутую поверхность с величиной заряда, находящегося внутри этой поверхности.)

Если проводить параллель между электростатикой и магнитостатикой, то можно сказать, что в основе магнитостатики лежит закон Ампера – закон магнитного взаимодействия двух токов, текущих в малых отрезках проводников, находящихся на некотором расстоянии друг от друга. Силовой характеристикой магнитного поля является вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$.

Магнитное поле, подобно электрическому, является объективной реальностью и в то же время служит средством описания взаимодействия движущихся заряженных частиц. Если мы знаем величину индукции магнитного поля в некоторой точке пространства в данный момент времени, то мы знаем величину и направление силы, которая подействовала бы на движущуюся заряженную частицу в этой пространственно-временной точке.

Для определения индукции магнитного поля, создаваемого электрическим током, можно использовать закон

Био – Савара. Согласно этому закону, малый отрезок проводника Δl (рис.1), по которому течет ток I (отрезку приписывается направление тока), создает в точке M , находящейся на расстоянии r от Δl ($\Delta l \ll r$), магнитное поле с индукцией, равной

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta l \sin \alpha}{4\pi r^2}.$$

Здесь α – угол между $\vec{\Delta l}$ и радиусом-вектором $\vec{r}$, проведенным от отрезка к точке, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная. Направление вектора $\Delta \vec{B}$ определяется правилом буравчика: если буравчик ввинчивать по направлению тока, то направление вращения рукоятки буравчика совпадает с направлением индукции магнитного поля. Полная индукция $\vec{B}$ магнитного поля, создаваемого в точке M всем проводником с током, равна векторной сумме индукций магнитного поля от всех участков проводника.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Найдем индукцию магнитного поля протяженного прямого провода с током I на расстоянии a от провода. Длину провода будем считать много большей a .

Для определения индукции магнитного поля вблизи провода воспользуемся законом Био – Савара. На рисунке 2 бесконечный прямой провод с током I расположен вдоль оси Z . На расстоянии z от начала координат выберем небольшой отрезок провода

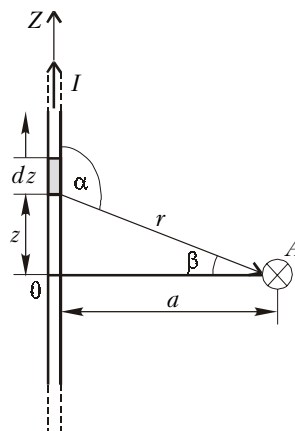


Рис. 2

длиной dz и запишем выражение для величины индукции магнитного поля в точке A , создаваемого элементом тока dz :

$$dB = \frac{\mu_0 I dz \sin \alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I \cos \beta \cdot dz}{4\pi r^2}.$$

Сделаем замену переменных: перейдем от z к β . Поскольку $z/a = \tan \beta$, то, продифференцировав обе части этого равенства, получим $dz = a d\beta / \cos^2 \beta$. После замены переменной найдем индукцию в точке A , просуммировав по всему проводу:

$$B = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0 I \cos \beta \cdot a d\beta}{4\pi r^2 \cos^2 \beta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int_0^{\pi/2} \cos \beta d\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}. (*)$$

Вектор индукции $\vec{B}$ магнитного поля в точке A направлен от нас перпендикулярно плоскости рисунка. Линии магнитной индукции представляют собой семейство окружностей, симметричных относительно провода.

Полученный результат остается справедливым для бесконечно длинного провода и любого конечного расстояния a , либо для провода конечной длины, но при условии, что расстояние a много меньше длины провода. Если проводник с током не является прямолинейным, то формула для B остается справедливой при расстояниях a , много меньших радиуса кривизны проводника.

А теперь разберем несколько конкретных задач.

Задача 1. Два длинных параллельных медных провода диаметром $d = 2$ мм расположены на расстоянии $L = 5$ см друг от друга. В обоих проводах текут одинаковые токи со средней скоростью движения электронов проводимости $v = 0,1$ см/с. Атомная масса меди $A = 63,6$ г/моль, плотность меди $\rho = 8,9$ г/см³, постоянная Авогадро $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹. Можно считать, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон.

Определите силу Ампера, действующую на элемент провода с током длиной $l = 1$ м. Вычислите электростатическую силу, которая действовала бы на электроны проводимости в проводе длиной $l = 1$ м со стороны электронов проводимости другого провода без учета положительных

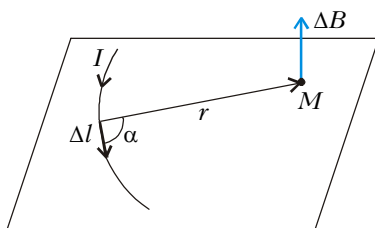


Рис. 1

зарядов, и сравните ее с силой Ампера.

Указание. Напряженность электрического поля вблизи заряженной бесконечной нити равна $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$, где q – заряд единичной длины нити, r – расстояние до нити.

Сначала вычислим концентрацию электронов проводимости в меди:

$$n = \frac{\rho N_A}{A} = 0,84 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$$

и силу тока в проводах:

$$I = \frac{\pi d^2}{4} nev = 42,2 \text{ А}$$

(здесь e – заряд электрона). Теперь, воспользовавшись формулой (*), найдем величину индукции магнитного поля, создаваемого током одного из проводов в месте расположения второго:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

На рисунке 3 изображена одна из линий индукции магнитного поля про-

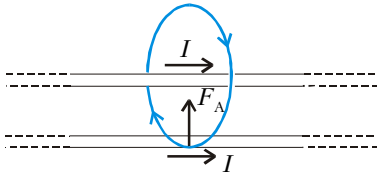


Рис. 3

вода. Сила Ампера, действующая на элемент провода, равна

$$F_A = BIl = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi L} = 7,13 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

Для вычисления электростатической силы найдем заряд q электронов, содержащихся в куске провода единичной длины:

$$q = \frac{\pi d^2}{4} nev = 4,22 \cdot 10^4 \text{ Кл.}$$

Напряженность электрического поля, создаваемого электронами, расположенными вдоль провода, на расстоянии L от провода равна

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ В/м,}$$

а электростатическая сила отталкивания, действующая на элемент провода единичной длины, заряженный электронами проводимости, составляет

$$F_э = qE = 6,3 \cdot 10^{20} \text{ Н.}$$

Отношение силы магнитного взаимодействия к электростатической силе в пределах погрешности расчета дает

$$\frac{F_A}{F_э} = 1,1 \cdot 10^{-23}.$$

Задача 2. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жесткая тонкая рамка из однородного куска проволоки в виде равностороннего треугольника со стороной a . Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, линии индукции которого перпендикулярны одной из сторон рамки. Масса рамки m , величина индукции B .

Какой ток нужно пропустить по рамке (против часовой стрелки), чтобы она начала приподниматься относительно одной из вершин треугольника?

Пусть по контуру против часовой стрелки течет ток I (рис. 4). Очевидно, что на все три стороны треугольника

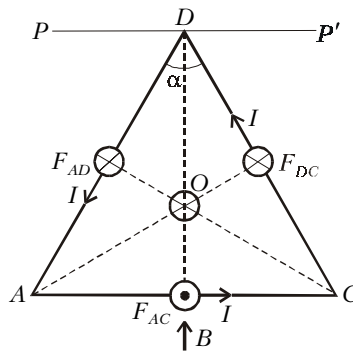


Рис. 4

будут действовать силы Ампера, точками приложения которых являются середины сторон AC , CD и DA . В точке пересечения медиан (точка O) приложена сила тяжести, равная mg и направленная от нас перпендикулярно плоскости рисунка.

Найдем результирующий момент сил Ампера, действующих на три стороны треугольника, относительно оси PP' . Сила $\vec{F}_{AC}$ равна $F_{AC} = IaB$ и направлена на нас, силы $\vec{F}_{AD}$ и $\vec{F}_{DC}$ равны

$$F_{AD} = F_{DC} = IaB \sin(\alpha/2) = IaB/2$$

(поскольку $\alpha = 60^\circ$) и направлены от нас. Суммарный момент всех трех сил Ампера относительно оси PP' равен

$$M_A = IaB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{IaB}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a - \frac{IaB}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a = \frac{\sqrt{3}}{4} Ia^2 B.$$

Видно, что с увеличением тока момент сил Ампера увеличивается и в некоторый момент окажется в состоянии приподнять рамку относительно вершины D , поскольку препятствует этому постоянный момент силы тяжести

$$M_g = mg \cdot \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Рамка начнет приподниматься относительно вершины D , когда

$$M_A \geq M_g, \text{ или } \frac{\sqrt{3}}{4} Ia^2 B \geq mg \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда

$$I \geq \frac{4mg}{3aB}.$$

Задача 3. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая тонкая жесткая квадратная рамка из однородного куска провода со стороной a . Рамка находится в магнитном поле длинного горизонтального провода с током, расположенного симметрично над рамкой (рис. 5). Масса рамки m , индукция магнитного поля у боковых сторон рамки 1 и 2 равна B , коэффициент трения скольжения рамки о поверхность стола μ ($\mu < 1/3$).

Какой ток нужно пропустить по рамке, чтобы она начала скользить по столу, не отрываясь от него?

Пусть по квадратной рамке течет ток I по часовой стрелке, если смотреть сверху. На боковые стороны рамки будут действовать силы Ампера $\vec{F}_1$ и

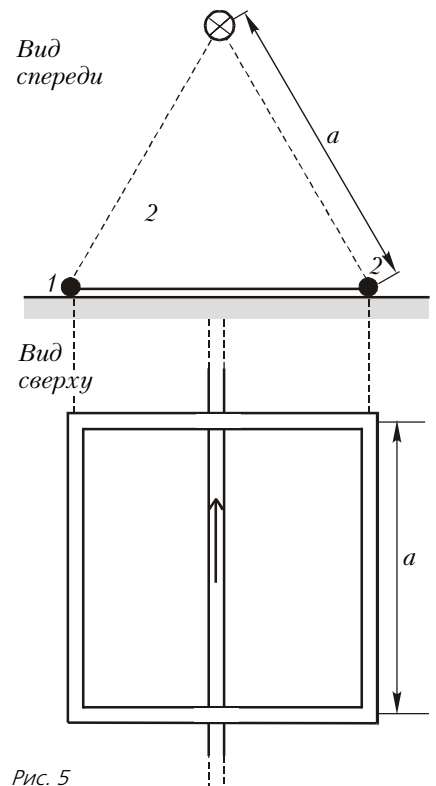


Рис. 5

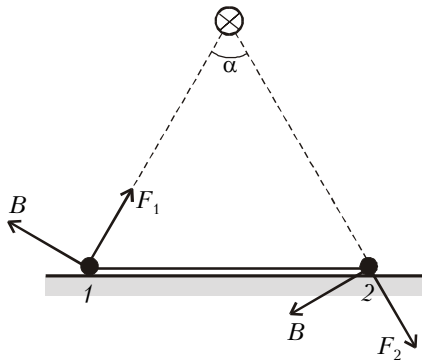


Рис. 6

$\vec{F}_2$ (рис.6), причем

$$F_1 = F_2 = IaB.$$

В общем случае при увеличении тока через рамку возможны два варианта: либо рамка начнет приподниматься относительно стороны 2, либо она начнет скользить без отрыва от стола.

Предположим, что коэффициент трения скольжения таков, что рамка может приподниматься раньше, чем наступит скольжение. Запишем условие подъема стороны 1:

$$F_1 a \frac{\sqrt{3}}{2} - mg \frac{a}{2} \geq 0.$$

Отсюда следует, что ток, при котором происходит подъем, подчиняется условию

$$I_{\text{п}} \geq \frac{mg}{\sqrt{3}aB}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда раньше наступит скольжение рамки. Результирующая сила вдоль горизонтальной оси равна

$$F_2 \cos \alpha + F_1 \cos \alpha = IaB \cdot 2 \cos \alpha.$$

Реакция опоры равна весу рамки mg . Запишем условие скольжения:

$$2IaB \cos \alpha \geq \mu mg.$$

Отсюда для тока, соответствующего скольжению, получаем

$$I_{\text{ск}} \geq \frac{\mu mg}{aB} = \frac{mg}{3aB}.$$

Сравнивая токи $I_{\text{п}}$ и $I_{\text{ск}}$, мы убеждаемся, что скольжение рамки наступит раньше при токах

$$I_{\text{ск}} \geq \frac{\mu mg}{aB}.$$

Задача 4. В сверхпроводящем тонком кольце радиусом R , индуктивностью L и массой m течет наведенный

ток I_0 . Кольцо, подвешенное на тонкой неупругой нити, опускают в область горизонтального однородного магнитного поля с индукцией $\vec{B}$. В устойчивом положении равновесия угол между вектором $\vec{B}$ и его проекцией на плоскость кольца равен α .

Определите зависимость угла α от начального тока I_0 в кольце и постройте график $\alpha = \alpha(I_0)$. Найдите также зависимость установившегося тока $I_{\text{уст}}$ в кольце от величины начального тока I_0 и постройте график $I_{\text{уст}} = I_{\text{уст}}(I_0)$.

Если кольцо находится в однородном магнитном поле $\vec{B}$ и в нем течет ток $I_{\text{уст}}$, то единственным положением устойчивого равновесия является положение, когда $\alpha = \pi/2$ и вектор индукции собственного магнитного поля кольца в его центре направлен вдоль вектора $\vec{B}$. Тогда, согласно закону сохранения магнитного потока через сверхпроводящее кольцо,

$$LI_0 = LI_{\text{уст}} + B\pi R^2.$$

Отсюда

$$I_{\text{уст}} = I_0 - \frac{B\pi R^2}{L}.$$

Из условия $I_{\text{уст}} > 0$ следует, что $I_0 > \pi R^2 B/L$, при этом $\alpha = \pi/2$. Если $I_0 < \pi R^2 B/L$, то устойчивого положения с током $I_{\text{уст}} \neq 0$ нет, поэтому устойчивое положение равновесия в этом случае будет при $I_{\text{уст}} = 0$; в этом случае $\alpha \neq \pi/2$. По закону сохранения

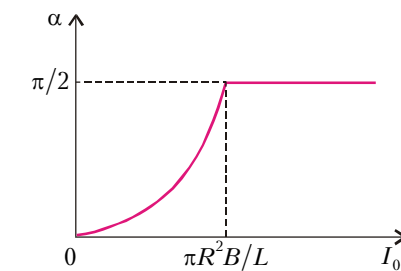


Рис. 7

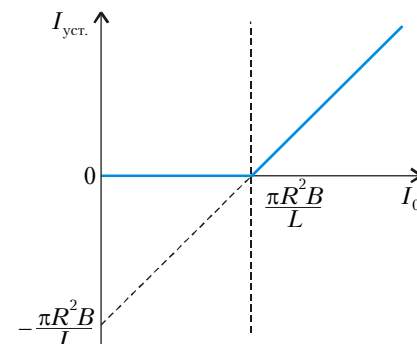


Рис. 8

магнитного потока,

$$LI_0 = \pi R^2 B \sin \alpha.$$

Отсюда

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{LI_0}{\pi R^2 B}\right).$$

Графики зависимостей $\alpha(I_0)$ и $I_{\text{уст}}(I_0)$ приведены на рисунках 7 и 8.

Задача 5*. По оси длинного полого диэлектрического ($\epsilon = 3$) цилиндра натянута заряженная нить, на единицу длины которой приходится заряд $q = 10^{-7}$ Кл/м (рис.9). Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 10^3$ с $^{-1}$.

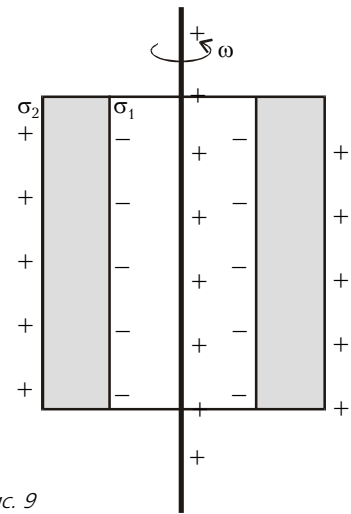


Рис. 9

Определите индукцию магнитного поля внутри диэлектрика, в полости цилиндра и во внешнем пространстве вдали от торцов цилиндра. Центробежными эффектами пренебречь.

Указание. Используйте формулу для индукции в соленоиде: $B = \mu_0 NI/L$, где N – число витков соленоида, L – длина соленоида, I – ток в соленоиде.

Под действием электрического поля зарядов нити происходит поляризация диэлектрического цилиндра: на внутренней поверхности цилиндра появляются отрицательные поляризационные заряды с поверхностной плотностью σ_1 , а на внешней стороне цилиндра – положительные заряды с плотностью σ_2 . Напряженность электрического поля вблизи заряженной нити в вакууме, на расстоянии много меньше длины нити, равна (см. указание к задаче 1)

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Очевидно, что внутри диэлектрика напряженность электрического поля

будет в ϵ раз меньше:

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon r}.$$

С другой стороны, мы можем использовать предыдущую формулу и для нахождения поля в диэлектрике:

$$E = \frac{q - \sigma_1 \cdot 2\pi R_1}{2\pi\epsilon_0 r},$$

где R_1 – радиус внутренней поверхности цилиндра. Приравняв последние два выражения, получим

$$\sigma_1 = \frac{(\epsilon - 1)q}{2\pi\epsilon R_1}.$$

Поскольку диэлектрик электронейтрален, то

$$2\pi R_2 \sigma_2 - 2\pi R_1 \sigma_1 = 0,$$

где R_2 – радиус внешней поверхности цилиндра. Отсюда

$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{R_1}{R_2} = \frac{(\epsilon - 1)q}{2\pi\epsilon R_2}.$$

Вращение поляризационных зарядов эквивалентно току в соленоиде.

При расстояниях $r_n \leq r \leq R_1$ (здесь r_n – радиус заряженной нити) суммарное магнитное поле двух эквивалентных соленоидов с радиусами R_1 и R_2 равно нулю из-за электронейтральности диэлектрика.

Рассмотрим теперь пространство внутри диэлектрика при $R_1 < r < R_2$. Индукция магнитного поля, создаваемого вращающимися зарядами плотностью σ_1 , очевидно, равна нулю, а вращающиеся заряды плотностью σ_2 создают однородное магнитное поле. В формулу для индукции в соленоиде входит величина NI/L – это величина поверхностного тока на единицу длины соленоида. Эквивалентная величина для вращающихся поляризационных зарядов плотностью σ_2 равна

$$\frac{\omega}{2\pi} \cdot 2\pi R_2 \sigma_2 = \omega R_2 \sigma_2 = \frac{\omega(\epsilon - 1)q}{2\pi\epsilon}.$$

Окончательное выражение для величины индукции будет таким:

$$B = \frac{\mu_0 \omega (\epsilon - 1) q}{2\pi\epsilon} = 1,33 \cdot 10^{-11} \text{ Тл}.$$

Индукция внутри диэлектрика параллельна нити и направлена вертикально вверх.

Во внешнем пространстве индукция магнитного поля равна нулю.

Задача 6*. На двух горизонтальных параллельных и проводящих рельсах, расстояние между которыми l ,

расположены два проводящих и отстоящих друг от друга на расстояние b стержня, каждый массой m . Омическое сопротивление каждого стержня R , а омическим сопротивлением рельсов можно пренебречь.

На каком расстоянии друг от друга окажутся стержни после включения внешнего однородного магнитного поля с индукцией $\vec{B}$? Вектор индукции перпендикулярен плоскости стержней и рельсов.

Сначала обсудим процесс установления магнитного поля, который осуществляется быстро, но за конечное время. Рассмотрим произвольный момент времени, когда еще происходит нарастание индукции магнитного поля. Нарастающее магнитное поле приводит к появлению вихревого электрического поля. Если магнитное поле симметрично относительно центра прямоугольника, образованного рельсами и стержнями, то силовые линии вихревого электрического поля будут иметь вид концентрических окружностей (рис. 10). Работа по перемещению единичного положительного заряда в вихревом поле вдоль замкнутого контура равна ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = -lb \frac{dB}{dt}.$$

В нашем контуре будет течь ток

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{2R} = \frac{lb}{2R} \frac{dB}{dt}.$$

Сила, действующая на каждый из стержней, равна

$$F = IlB = \frac{l^2 b}{2R} B \frac{dB}{dt} = \frac{l^2 b}{4R} \frac{d(B^2)}{dt}.$$

Уравнение движения каждого стержня имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{l^2 b}{4R} \frac{d(B^2)}{dt},$$

или

$$dv = \frac{l^2 b}{4mR} d(B^2).$$

Мы нашли связь бесконечно малого

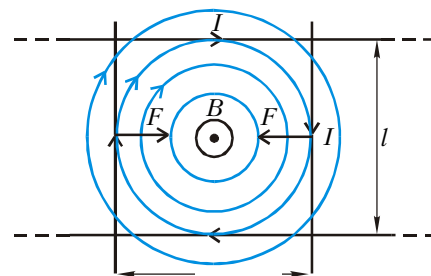


Рис. 10

изменения скорости стержня с бесконечно малым приращением квадрата индукции поля. Для полных приращений получим

$$\int_0^{v_0} dv = \int_0^{B_0} \frac{l^2 b}{4mR} d(B^2).$$

Отсюда найдем конечную скорость стержней:

$$v_0 = \frac{l^2 b B_0^2}{4mR}.$$

Теперь рассмотрим второй этап, когда мы имеем стационарное однородное магнитное поле с индукцией B_0 . В начальный момент времени два стержня находятся на расстоянии b друг от друга и имеют начальные скорости, равные v_0 и направленные навстречу друг другу. На рисунке 11 изображены стержни в произвольный момент времени, когда их координаты равны

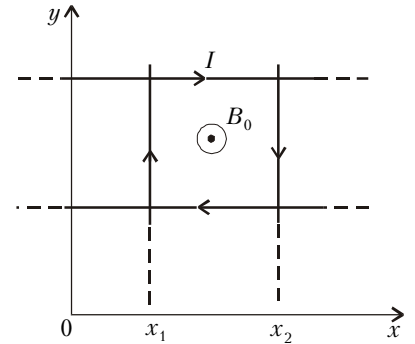


Рис. 11

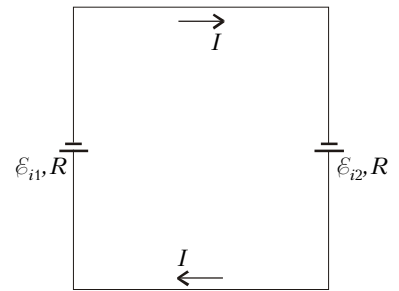


Рис. 12

x_1 и x_2 . Пусть в этот момент в контуре течет ток I по часовой стрелке. Запишем, уравнения движения стержней:

$$mx_1'' = IlB_0,$$

$$mx_2'' = -IlB_0.$$

Эквивалентная электрическая схема контура изображена на рисунке 12, где $\mathcal{E}_{i1} = -x_1' l B_0$ – ЭДС индукции,

(Окончание см. на с. 55)

возникающая в стержне с координатой x_1 , $\mathcal{E}_{i2} = x_2' l B_0$ – ЭДС индукции во втором стержне, R – их внутренние сопротивления. Закон Ома для этой схемы имеет вид

$$x_2' l B_0 - x_1' l B_0 = 2IR.$$

Объединив последние три уравнения, получим

$$x_2'' - x_1'' = -\frac{(lB_0)^2}{mR}(x_2' - x_1'),$$

или, обозначив $x_2 - x_1 = z$,

$$z'' + \frac{(lB_0)^2}{mR} z' = 0.$$

После интегрирования запишем

$$z' + \frac{(lB_0)^2}{mR} z = \text{const}.$$

Из начальных условий следует, что

$$\text{const} = \frac{(lB_0)^2}{mR} b - 2v_0.$$

При $t \rightarrow \infty$ $z' \rightarrow 0$, поэтому для конечного расстояния между стержнями найдем

$$b_{\kappa} = b - \frac{2v_0 m R}{(lB_0)^2} = \frac{b}{2}.$$

Упражнения

1. Какова индукция магнитного поля создаваемого вращением электрона по круговой орбите радиусом $r = 0,53 \cdot 10^{-8}$ см, вблизи протона? Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Указание. Индукция магнитного поля

в центре кольца с током I равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}, \text{ где } R - \text{ радиус кольца.}$$

2. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жесткая тонкая квадратная рамка из однородного куска провода со стороной a . Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, линии индукции которого параллельны одной из диагоналей квадрата рамки. Масса рамки m , величина индукции B . Какой ток нужно пропустить по рамке, чтобы она начала приподниматься относительно одной из вершин квадрата?

3. По оси длинного металлического цилиндра натянута заряженная нить, на единицу длины которой приходится заряд $q = 10^{-7}$ Кл/м. Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 10^3$ с⁻¹. Пренебрегая центробежными эффектами, определите индукцию магнитного поля внутри металла, в полости цилиндра и во внешнем пространстве вдали от торцов цилиндра.

Указание. Индукция магнитного поля внутри длинного соленоида с числом витков N и длиной L равна $B = \mu_0 NI/L$, где I – ток в соленоиде.

4*. Частица с зарядом q и массой m влетает с начальной скоростью v_0 в вязкую среду с поперечным однородным магнитным полем с индукцией B . Сила вязкого трения пропорциональна скорости частицы: $\vec{F}_{\text{тр}} = -\alpha \vec{v}$. На каком расстоянии от начальной точки (точки влета частицы в среду) частица остановится?