



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 4 - 2000 г. / Школа в «Кванте»

Л. Семёнова

Тригонометрические тождества

© «Квант»

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!

<http://vivovoco.nns.ru>
<http://vivovoco.rsl.ru>
<http://www.ibmh.msk.su/vivovoco>

a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$;

6) $2 \sin x + \cos x = 2$.

5. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = 3 \cos x - 4 \sin x.$$

6. Найдите множество значений функции

$$g(x) = 12 \sin x + 5 \cos x.$$

7. Докажите формулы

а) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$;

б) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$.

8. Выразите $\cos 4\alpha$ через $\cos \alpha$.

9. Докажите формулы

а) $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$;

б) $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$;

в) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

(Эти формулы называют формулами универсальной тригонометрической подстановки. Они позволяют любое уравнение, в котором присутствуют $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, свести к уравнению с одной неизвестной: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Обратите внимание, что области определения левых и правых частей не совпадают. Поэтому безоглядное применение этих формул может приводить к неприятностям.)

10. Докажите формулы

а) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$;

б) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$;

в) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$;

г) $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$;

д) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$.

11. а) Нарисуйте на клетчатой бумаге прямые, заданные уравнениями $y = 2x - 3$ и $y = 5 - 3x$. Измерьте транспортиром величину угла между ними и затем найдите эту величину не приближенно, а точно при помощи формулы тангенса разности.

б) Найдите величину угла между прямыми, заданными уравнениями $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ (угловые коэффициенты k_1 и k_2 — это тангенсы углов наклона прямых к положительному направлению оси абсцисс).

12. Ученик решал задачу и получил неверный ответ. Могла ли быть тому виной использованная им формула

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}?$$

13. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}(x + 45^\circ) = -9 \operatorname{ctg}^2 x - 1,$$

воспользовавшись формулой

$$\operatorname{tg}(x + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

Нужно ли отдельно рассматривать значения $x = 90^\circ + 180^\circ n$, где n — целое число?

I. Проведем высоту

Перейдем к самому интересному — к доказательствам тождеств (1) и (2). Для удобства читателя доказательства пронумерованы. Сейчас, как видно из заголовка этого раздела, мы рассмотрим первый способ.

Опустим высоту CH на сторону AB треугольника ABC (рис. 1, а):

$$AB = AH + HB = AC \cos \alpha + BC \cos \beta. \quad (8)$$

Вспомним теорему синусов: $AB = 2R \sin \gamma$, $AC = 2R \sin \beta$ и $BC = 2R \sin \alpha$,

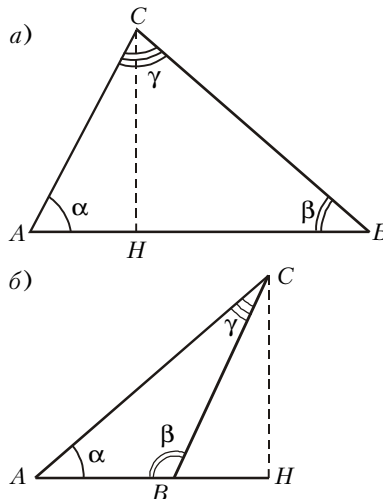


Рис. 1

где R — радиус описанной окружности треугольника ABC . Подставим эти выражения в формулу (8) и разделим на $2R$. Получим

$$\sin \gamma = \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta.$$

Осталось заметить, что $\sin \gamma = \sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$, — и формула (1) доказана.

Существенный недостаток этого доказательства в том, что α и β должны быть острыми углами — иначе треугольник ABC с нужными нам углами либо вообще не существует, либо же высота CH падает не на сторону, а на ее продолжение. Впрочем, эти ограничения можно ослабить, заменив их на неравенства $0 < \alpha$, $0 < \beta$, $\alpha + \beta < 180^\circ$: например, если угол B тупой (рис. 1, б), то $AB = AH - BH = AC \cos \alpha - BC \cos(180^\circ - \beta) = AC \cos \alpha + BC \cos \beta$.

Однако в формуле (1) величины α и β могут быть любыми, не обязательно положительными; и даже если они положительные, их сумма $\alpha + \beta$ не обязательно меньше 180° . Как быть? Приходится использовать формулы

приведения: $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$, $\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha$ и т. п. При помощи них можно свести общий случай к ситуации, для которой формула благополучно доказана. Но ничего особенно интересного в этом скучном разборе случаев нет. А потому я не буду этим заниматься и вам не советую, особенно если предстоит сдавать экзамен: вряд ли у экзаменатора хватит терпения выдержать такой перебор. Он просто скажет вам: «До тех пор, пока не разобраны все случаи, считать формулу доказанной нельзя. Приходите через год!». И будет прав: если перебор неполон, то утверждение не доказано, а оценка за это полагается сами знаете какая.

II. Выясним геометрический смысл

Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат и отложим от оси абсцисс против часовой стрелки угол величиной α , а от полученного луча OA — угол величиной β (рис. 2). Опустим перпендикуляры BD и BE на ось абсцисс и луч

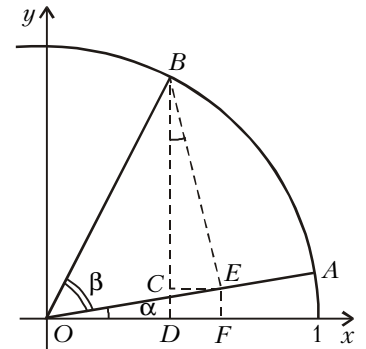


Рис. 2

OA . Затем из точки E опустим перпендикуляры EF и EC на прямые OD и BD . По свойству углов с взаимно перпендикулярными сторонами,

$$\angle CBE = \angle EOF = \alpha.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= BD = BC + CD = \\ &= BC + EF = BE \cos \alpha + OE \sin \alpha = \\ &= \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= OD = OF - DF = \\ &= OF - CE = OE \cos \alpha - BE \sin \alpha = \\ &= \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha. \end{aligned}$$

Изложенное доказательство гораздо лучше первого: оно верно для любых величин α и β — для положительных и отрицательных, больших и маленьких. (Использованные величины «сами собой» в нужных случаях положительные, в нужных — отрицатель-

ны.) Убедить в этом экзаменатора легче, чем в первом доказательстве – но все-таки убеждать надо...

III. Скалярное произведение

Весьма лаконичное доказательство формулы (2) получим, если посчитаем скалярное произведение векторов $\vec{a} = (\cos \alpha; \sin \alpha)$, $\vec{b} = (\cos \beta; -\sin \beta)$.

С одной стороны, оно равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

С другой стороны, известно, что скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Осталось сравнить последние две формулы.

Запутаться, согласитесь, негде. Но один скользкий момент все-таки есть: вся трудность спрятана в формуле, выражающей скалярное произведение векторов через их координаты. Поэтому, прежде чем использовать на экзамене этот способ, надо вспомнить доказательство формулы для скалярного произведения. (И годится не всякое доказательство, а только то, в котором не использованы тригонометрические формулы сложения, – иначе возникнет порочный круг.)

IV. Повороты

Сейчас я изложу способ, к которому придаться труднее всего.

Поворот вокруг точки O на угол φ – это отображение плоскости, при котором всякая точка M переходит в такую точку N , что $OM = ON$ и $\angle MON = \varphi$ (рис. 3). Угол φ откладывают против часовой стрелки, если φ положительный; если же $\varphi < 0$, то откладывают по часовой стрелке угол величиной $-\varphi$. Поворот обычно обозначают R_φ^O , по первой букве слова rotation – вращения (сравните: ротор, ротация).

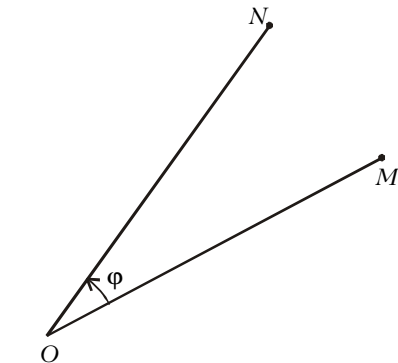


Рис. 3

Рассмотрим повороты R^α и R^β вокруг начала координат на углы α и β . (Поскольку в излагаемом доказательстве использованы повороты только вокруг начала координат, центр поворота мы не указали.) Последовательное выполнение этих двух поворотов дает поворот на угол $\alpha + \beta$:

$$R^\beta \circ R^\alpha = R^{\alpha+\beta}. \quad (9)$$

Оказывается, если выписать формулы, которые описывают в координатах эти преобразования плоскости, то формула (9) приведет к формулам (1) и (2). Проведем эти вычисления. При повороте на угол α вокруг начала координат точка $(1; 0)$ переходит, как

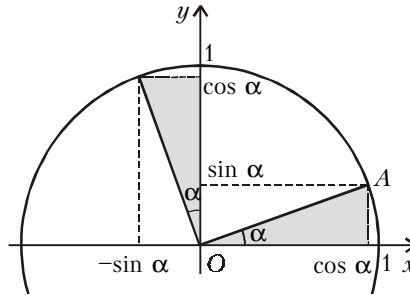


Рис. 4

следует из определений косинуса и синуса, в точку с координатами $(\cos \alpha; \sin \alpha)$ (рис. 4). Точка $(0; 1)$ при этом повороте переходит в точку $(-\sin \alpha; \cos \alpha)$.

Далее, вектор $(x; y)$ можно разложить в сумму векторов, параллельных осям координат, по формуле

$$(x; y) = x \cdot (1; 0) + y \cdot (0; 1).$$

Поскольку при повороте любой параллелограмм переходит в параллелограмм, легко понять, что для любых чисел x, y и любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ верно равенство

$$R^\alpha(x\vec{a} + y\vec{b}) = xR^\alpha(\vec{a}) + yR^\alpha(\vec{b}).$$

Значит, вектор $(x; y)$ при повороте R^α переходит (рис. 5) в вектор

$$\begin{aligned} xR^\alpha(1; 0) + yR^\alpha(0; 1) &= \\ &= x(\cos \alpha; \sin \alpha) + y(-\sin \alpha; \cos \alpha) = \\ &= (x \cos \alpha - y \sin \alpha; x \sin \alpha + y \cos \alpha). \end{aligned}$$

Последняя формула позволяет написать выражения для координат $(x_1; y_1)$ точки, в которую переходит точка $(x; y)$ при повороте на угол α вокруг начала координат:

$$x_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad (10)$$

$$y_1 = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \quad (11)$$

Для координат $(x_2; y_2)$ точки, в кото-

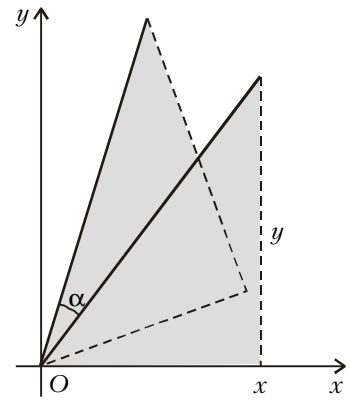


Рис. 5

рую переходит точка $(x_1; y_1)$ при повороте R^β , верны аналогичные формулы (10) и (11) формулы

$$x_2 = x_1 \cos \beta - y_1 \sin \beta, \quad (12)$$

$$y_2 = x_1 \sin \beta + y_1 \cos \beta. \quad (13)$$

Подставив в (12) выражения (10) и (11), получим

$$\begin{aligned} x_2 &= (x \cos \alpha - y \sin \alpha) \cos \beta - \\ &\quad - (x \sin \alpha + y \cos \alpha) \sin \beta. \end{aligned} \quad (14)$$

Раскроем скобки и сгруппируем:

$$\begin{aligned} x_2 &= x \cos \alpha \cos \beta - y \sin \alpha \cos \beta - \\ &\quad - x \sin \alpha \sin \beta - y \cos \alpha \sin \beta = \\ &= x(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) - \\ &\quad - y(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta). \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь заметим, что

$$x_2 = x \cos(\alpha + \beta) - y \sin(\alpha + \beta), \quad (16)$$

и сравним формулы (15) и (16). В одной формуле коэффициент при x равен $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, в другой формуле (для той же самой координаты x_2) коэффициент при x равен $\cos(\alpha + \beta)$. Получаем формулу (1). Аналогично, сравнивая коэффициенты при y , получаем формулу (2). (Возможно, кому-то сравнение коэффициентов покажется подозрительным приемом. Самый простой, на мой взгляд, способ обосновать его законность – подставить в формулы (15) и (16) сначала $x = 1, y = 0$, а затем $x = 0, y = 1$.)

Упражнения

14. Для y_2 выведите формулу, аналогичную формуле (14), и убедитесь, что таким образом получаются те же самые формулы (1) и (2).

15. Найдите уравнение окружности, в которую переходит окружность с центром $(0; 3)$ и радиусом 2 при повороте вокруг начала координат а) 90° ; б) 45° .

16. В какую точку переходит точка $(x; y)$ при отражении относительно прямой, проходящей через начало координат под углом

Ф к положительному направлению оси абсцисс?

17. Найдите координаты точки, в которую переходит точка $(x; y)$ при симметрии относительно а) точки $(0; 0)$; б) точки $(a; b)$; в) прямой, заданной уравнением $x + y = 1$; г*) прямой, заданной уравнением $y = x \operatorname{tg} \varphi + b$.

18. Гиперболу, заданную уравнением $xy = 1$, повернули на 45° против часовой стрелки. Каково уравнение полученной кривой?

19. Эллипс, заданный уравнением $x^2 + 4y^2 = 4$, повернули на 30° по часовой стрелке. Каково уравнение полученной кривой?

V. Теорема Птолемея

Рассмотрим прямоугольные треугольники OAC и OBC с общей гипотенузой $OC = 1$. Оба они вписаны в окружность с диаметром OC (рис.6).

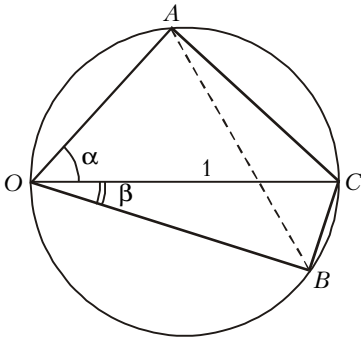


Рис. 6

Напомним, что теорема Птолемея гласит: *произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон*. Значит,

$$OC \cdot AB = OA \cdot BC + OB \cdot AC. \quad (17)$$

Поскольку $OC = 1$, $OA = \cos \alpha$, $OB = \cos \beta$, $CB = \sin \beta$ и $CA = \sin \alpha$, равенство (17) можно записать в виде

$$AB = \cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha.$$

По теореме синусов, $AB = 1 \cdot \sin(\alpha + \beta)$ (в самом деле, 1 – это диаметр описанной окружности треугольника OAB , $\alpha + \beta$ – величина угла AOB). Формула (1) оказалась частным случаем теоремы Птолемея! (Разумеется, наше доказательство имеет смысл только для острых углов α и β .)

Между прочим, Птолемей использовал свою теорему именно для вычисления тригонометрических функций одних углов через функции других углов. Поэтому можно сказать, что исторически теорема Птолемея (ок. 90 – ок. 160) предшествовала формулам (1) и (2). В современную форму тригонометрию привел Леонард Эйлер (1707–1783).

Задача Архимеда

Пять из обещанных шести доказательств разобраны. Давайте повременим с шестым способом, чтобы вспомнить одну историю. Когда в 1986 году «Задачник «Кванта» приближался к М1000, был объявлен конкурс на лучшую задачу года. Поступили разные задачи, но ни одна из них не понравилась настолько, чтобы присвоить ей столь «круглый» номер. И тогда было принято решение: объявить победителем конкурса Архимеда из Сиракуз (ок. 287–212 до н.э.).

М1000. В дугу AB вписана ломаная AMB из двух отрезков ($AM > MB$). Докажите, что основание перпендикуляра KH , опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM , делит ломаную пополам: $AN = HM + MB$.

Геометрическое решение использует неожиданное дополнительное построение (рис.7): на продолжении отрезка AM отложим точку C такую, что $MC = MB$. Угол BMC как внешний угол треугольника AMB равен сумме углов BAM и ABM . В то же время угол

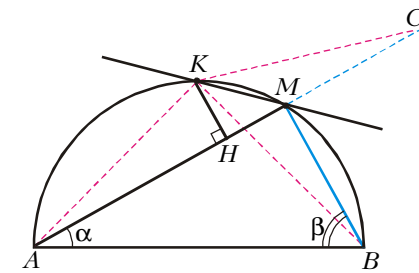


Рис. 7

KMA как вписанный измеряется половиной дуги AK и, следовательно, равен полусумме углов BAM и ABM . Поэтому MK – биссектриса угла BMC . Значит, $MK \perp BC$ и $KC = KB$. Отсюда следует, что $KA = KB = KC$. Поскольку в равнобедренном треугольнике AKC высота KH является заодно и медианой, имеем

$$AN = HC = HM + MB,$$

что и требовалось.

Тригонометрическое решение не требует фантазии: обозначим $\angle BAM = \alpha$ и $\angle ABM = \beta$. Тогда $AM = 2R \sin \beta$ и $BM = 2R \sin \alpha$, где R – радиус описанной окружности треугольника ABM . Поэтому

$$\begin{aligned} AM + MB &= 2R(\sin \alpha + \sin \beta) = \\ &= 4R \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

С другой стороны, $AK = 2R \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ и

$\angle KAM = (\beta - \alpha)/2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} AN &= AK \cos \angle KAM = \\ &= 2R \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \\ &= \frac{1}{2}(AM + MB). \end{aligned}$$

VI. Умножение комплексных чисел

Следующее доказательство использует не элементарную геометрию, а комплексные числа.

Рассмотрим произведение чисел $\cos \alpha + i \sin \alpha$ и $\cos \beta + i \sin \beta$. С одной стороны,

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) &= \\ &= \cos \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta + \\ &+ i \sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (18) \end{aligned}$$

С другой стороны, чтобы перемножить числа, заданные в тригонометрической форме, достаточно перемножить их модули и сложить аргументы. Модули чисел $\cos \alpha + i \sin \alpha$ и $\cos \beta + i \sin \beta$ равны 1; аргументы равны α и β соответственно. Значит,

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) &= \\ &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta). \quad (19) \end{aligned}$$

Сравните формулы (18) и (19) – опять получите формулы (1) и (2)!

Правильно или нет изложенное доказательство, нет ли в нем порочного круга? Вдруг при определении комплексных чисел были использованы тригонометрические формулы сложения? Смотрим в учебники. Да, в большинстве из них при введении комплексных чисел использованы формулы (1) и (2).

Тем не менее, избежать порочного круга можно. Как это сделать, рассказано в следующем разделе статьи. А здесь напоследок замечу, что доказательство выглядит еще эффективнее, если воспользоваться формулой Эйлера $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Правило умножения чисел, записанных в тригонометрической форме, примет вид свойства показательной функции:

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha + \beta)}. \quad (20)$$

(Разумеется, при этом тоже надо позаботиться об отсутствии порочного круга. Во всяком случае, для экспоненты $e^{i\alpha}$ желательно дать определение, отличное от формулы Эйлера. И что совершенно обязательно – доказывать формулу (20) надо без использования формул (1) и (2). Все это можно сделать, но статья и так уже слишком длинная.)

Геометрический способ определения комплексных чисел и операций над ними

С алгебраическим способом введения комплексных чисел можно познакомиться по статьям «Комплексные числа» (Приложение к журналу «Квант» №2 за 1994 г.), «Многочлены деления круга» («Квант» №1 за 1998 г.) и «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» («Квант» №3 за 1999 г.). Сейчас нас интересует другой – геометрический – способ.

Рассмотрим плоскость, в которой задана система координат (рис.8). Любую точку z

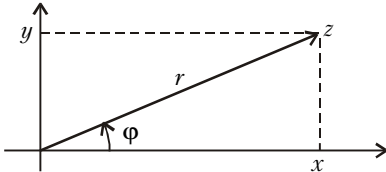


Рис. 8

плоскости можно задавать не только декартовыми координатами $(x; y)$, но и полярными координатами $(r; \varphi)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние от точки z до начала координат; φ – угол, на который можно повернуть против часовой стрелки положительную полуось числовой прямой до того положения, при котором она пройдет через точку z .

Как видим, всегда $r \geq 0$, причем $r = 0$ только при $z = 0$. Кроме того, для всех $z \neq 0$ величина φ определена с точностью до кратных 360° , так что в интервале $0 \leq \varphi < 360^\circ$ величина φ определена однозначно. Величину r называют модулем (или

абсолютной величиной) числа z , φ – аргументом числа z . Обозначения: $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Сумму $z_1 + z_2$ любых двух точек z_1 и z_2 определим как сумму векторов, т.е. по правилу параллелограмма (рис.9). Произведение $z_1 z_2$ чисел, полярные координаты

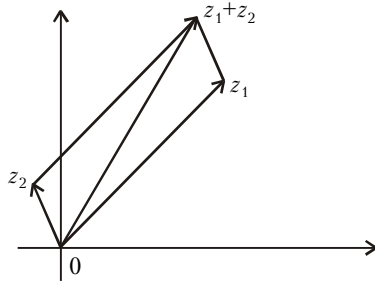


Рис. 9

которых суть $(r_1; \varphi_1)$ и $(r_2; \varphi_2)$, определим как точку с полярными координатами $(r_1 r_2; \varphi_1 + \varphi_2)$ (модули перемножаем, аргументы складываем).

Очевидно, для точек вещественной числовой прямой вышеопределенные операции сложения и умножения не выводят за пределы этой прямой и соответствуют обычным операциям сложения и умножения вещественных чисел. (Проверьте свойства умножения, особенно правило «минус на минус дает плюс».)

Из основных свойств операций умножения и сложения для комплексных чисел неочевиден только распределительный закон:

$$z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2. \quad (21)$$

Для нас этот закон очень важен: в формуле (18) именно он позволил раскрыть скобки. Давайте его докажем. Геометрически умножение на z означает последовательное (в любом порядке) применение гомотетии с коэффициентом $|z|$ и поворота вокруг начала координат на угол φ . При гомотетии параллелограмм переходит в параллелограмм. При повороте – то же самое, параллелограмм переходит в параллелограмм! А это и есть формула (21)! (Другими словами, сложить сначала два вектора $z_1 + z_2$ (рис.10) и увеличить затем длину получен-

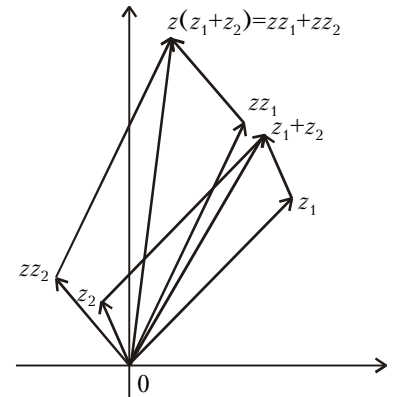


Рис. 10

ной суммы в $|z|$ раз, осуществив к тому же поворот на угол φ , – это все равно что сначала каждый из векторов z_1 и z_2 увеличить в $|z|$ раз и повернуть на угол φ , а уже затем сложить полученные векторы.)