



117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
тел. : [095] 930-56-48
e-mail: bquantum@sovam.com (с пометкой «Квант»).

№ 4 - 2000 г. / Калейдоскоп «Кванта»

Б. Споров

Нет, ребята, всё не так...

© «Квант»

*Использование или распространение этого материала
в коммерческих целях
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск
VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!

<http://vivovoco.nns.ru>
<http://vivovoco.rsl.ru>
<http://www.ibmh.msk.su/vivovoco>

Нет, ребята, все не так...

КВАДРАТ РАЗМЕРОМ 8×8 можно разрезать (рис. 1) на части, из которых складывается

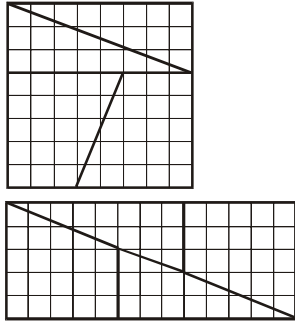


Рис.1

прямоугольник размером 5×13 . Значит, $64 = 65$.

На рисунке 2 квадрат размером 13×13 разрезан на части, из кото-

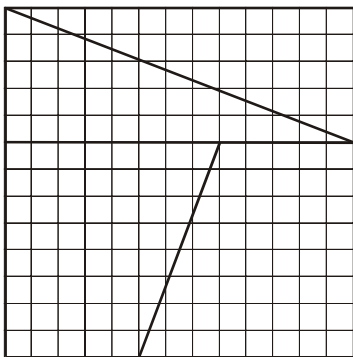


Рис.2

рых легко сложить прямоугольник 8×21 . Значит, $169 = 13^2 = 8 \cdot 21 = 168$.

Есть и много других столь же эффектных разрезов (рис.3).

Ваш учитель геометрии вряд ли согласится, что все треугольники равнобедренные. Тем не менее, это так!

Проведем биссектрису угла A треугольника ABC и серединный перпендикуляр к стороне BC (рис. 4, а). Из точки O их пересечения опустим перпендикуляры на стороны треугольника. Прямоугольные треугольники BOL и COL равны (по двум катетам). Значит, $BO = CO$. Треугольники NOA и

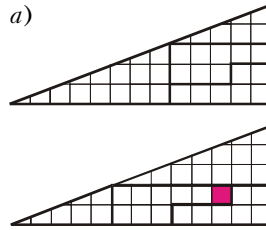


Рис.3

MOA тоже равны (по гипотенузе и острому углу). Поэтому $ON = OM$, так что треугольники BNO и CMO равны (по гипотенузе и катету). Это значит, что $BN = CM$ и $AB = AN + NB = AM + MC =$

$= AC$,

так что $AB = AC$. Треугольник ABC равнобедренный!

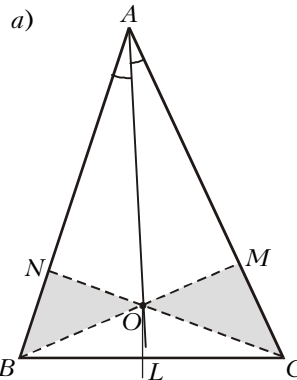


Рис.4

Вы можете возразить, что на точном чертеже точка O попадает не внутрь треугольника, а лежит вне. Более того, знаток геометрии даже скажет, что точка O — это середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC . На это у меня готов ответ

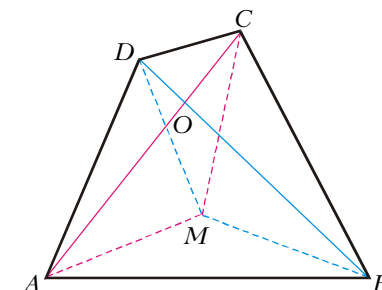
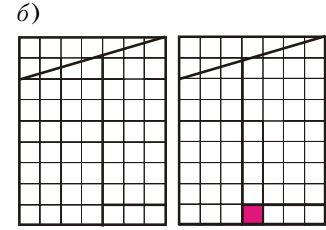


Рис.5

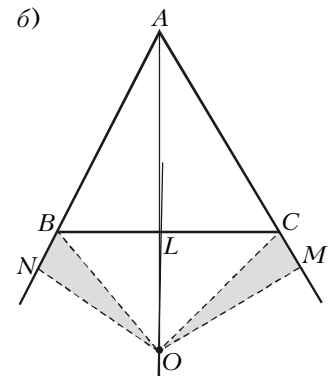


(рис.4,б):

$AB = AN - NB = AM - MC = AC$,

всего лишь вместо суммы — разность. Треугольник все равно равнобедренный!

Многие знают, что если $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, то



точкой, сумма расстояний от которой до вершин минимальна, является точка O пересечения диагоналей (рис.5). Доказать это очень легко: для любой точки M по неравенству треугольника имеем $AM + MC \geq AC$ и $BM + MD \geq BD$, откуда

$AM + CM + BM + DM \geq AC +$

$+ BD = AO + OC + BO + OD$,

что и требовалось.

Пусть точки A и B неподвижны, а точки C и D стремятся к вершине E равностороннего треугольника ABE (рис.6). Точка O пересечения диагоналей тоже устремится к точке E . Мы доказали, что сумма расстояний от точки O до вершин четырехугольника минимальна. В пределе четы-

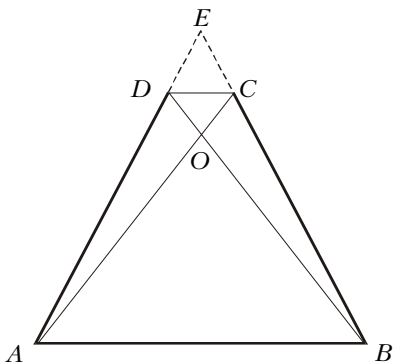


Рис.6

реугольник превращается в треугольник ABE . Значит, сумма расстояний от предельного положения точки O — минимальная из всевозможных сумм расстояний от точек плоскости до вершин треугольника ABE .

Однако сумма расстояний от центра описанной окружности до вершин треугольника меньше суммы $AE + BE$. Противоречие!

Не все ладно и в алгебре. Рассмотрим уравнение

$$\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = -1.$$

Возведем обе части в куб, воспользовавшись формулой

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

при $a = \sqrt[3]{1+x}$ и $b = \sqrt[3]{1-x}$. Получаем

$$1+x+3\sqrt[3]{1-x^2} \cdot (-1) + 1-x = -1,$$

т.е. $\sqrt[3]{1-x^2} = 1$, откуда $x = 0$. Подставьте $x = 0$ в исходное уравнение — получите равенство $2 = -1$.

Тригонометрии я тоже не доверяю. Вот, например, уравнение

$$3 \sin x - \cos x = 1.$$

Воспользуемся формулами

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Обозначив $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, придем к

уравнению

$$\frac{6t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1,$$

откуда $6t - 1 + t^2 = 1 + t^2$, т.е. $t = 1/3$. Мы нашли ответ: $x = 2 \arctg \frac{1}{3} + 2\pi n$, где n — любое целое число.

Но удовлетворяющее данному уравнению $x = \rho$ не представимо в таком виде.

Да ладно бы в тригонометрии. Неравенства — и те не позволяют расслабиться. Обозначим

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$$

Очевидно,

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots \quad (*)$$

Вычитая это равенство из предыдущего, получаем:

$$S - \frac{S}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \quad (**)$$

Поскольку $\frac{1}{2} < 1$, $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$, и

вообще, $\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1}$, то каждое

слагаемое правой части формулы (*) меньше соответствующего слагаемого формулы (**). Следовательно,

$$\frac{S}{2} < S - \frac{S}{2},$$

что удивительно.

Если вы уже изучали интегралы и логарифмы, то сможете насладиться следующим парадоксом. Вычислим двумя способами

$\int_1^2 (\ln 2x)' dx$. Во-первых, поскольку $\frac{1}{x} \ln(2x) = \ln 2 + \ln x$, имеем

$$\int_1^2 (\ln 2 + \ln x)' dx = \int_1^2 (\ln x)' dx = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2.$$

Во-вторых, этот же интеграл можно вычислить, выполнив замену

$t = 2x$:

$$\int_1^2 (\ln 2x)' dx = \frac{1}{2} \int_2^4 (\ln t)' dt = \frac{1}{2} \ln t \Big|_2^4 = \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Итак, $\ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2$.

К сожалению, логарифмы в школе проходят очень поздно, так что не все знакомы с ними. Для таких читателей показываю то же самое еще раз, но без логарифмов. С одной стороны,

$$\int_0^1 (x^2)' dx = x^2 \Big|_0^1 = 1.$$

С другой стороны, можно выполнить замену $x = t/2$. Имеем:

$$\int_0^1 (x^2)' dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\frac{t^2}{4} \right)' dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{4} \Big|_0^2 = \frac{1}{2}.$$

Итак, $1 = 1/2$. Теперь легко доказать, что все числа равны между собой. А это, согласитесь, очень помогает в жизни (особенно при денежных расчетах — только нужно использовать это в выгодную для себя сторону и успеть убежать).

Наконец, если вы знакомы с формулой Эйлера

$$\sin x = (e^{ix} - e^{-ix}) / (2i),$$

то можете легко доказать, что синус тождественно равен нулю:

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{2\pi i \cdot \frac{x}{b\pi g}} - e^{-2\pi i \cdot \frac{x}{b\pi g}}}{2i} = \frac{1^{x/b\pi g} - 1^{-x/b\pi g}}{2i} = \frac{1^{x/b\pi g} - 1^{x/b\pi g}}{2i} = 0.$$

Аналогично можно доказать, что $\cos x$ тождественно равен 1. Вывод: как в элементарной, так и в высшей математике — одна путаница и обман налогоплательщиков.

Б.Споров