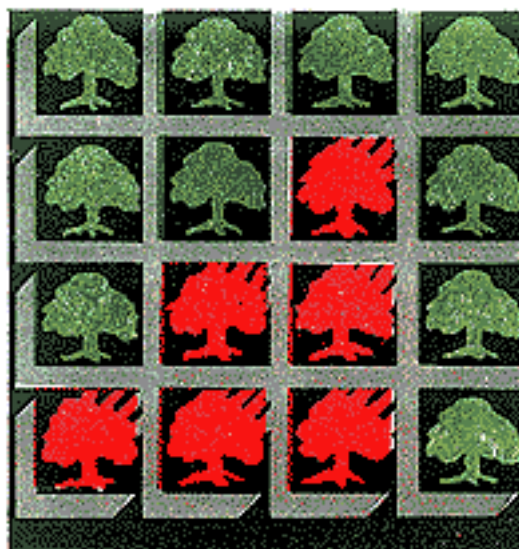




БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •
выпуск 19

А.Л. ЭФРОС

ФИЗИКА И ГЕОМЕТРИЯ БЕСПОРЯДКА



Часть III



VIVOS VOCO!

<http://vivovoco.nns.ru>



Уважаемые читатели!

В сотрудничестве с редакцией журнала «Квант» мы начали сетевую публикацию некоторых выпусков Библиотечки «Квант». Эти файлы не могут распространяться на коммерческой основе и размещаться на серверах с платным доступом.

Текст и иллюстрации воспроизведены с издания:

А. Л. Эфрос «Физика и геометрия беспорядка»
(Библиотечка «Квант», выпуск 19),
М., Изд. «Наука», Гл. редакция физ.-мат. литературы, 1982 г.

Публикация подготовлена учениками московской гимназии № 1543 Владимиром Александровым, Даниилом Мусатовым, Николаем Винниченко и др. в 1999-2000 гг.

Часть III.
КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВЕЛИЧИН
ВБЛИЗИ ПОРОГА ПРОТЕКАНИЯ
И ГЕОМЕТРИЯ БЕСКОНЕЧНОГО КЛАСТЕРА

Глава 11.
РЕШЕТКА БЕТЕ

Слухи.
Решение задачи узлов на решетке Бете.
Обсуждение результатов

Глава 12.
СТРУКТУРА БЕСКОНЕЧНОГО КЛАСТЕРА

Модель Шкловского - де Жена.
Роль размеров системы.
Электропроводность вблизи порога протекания..
Функция $P(x)$ вблизи порога протекания.
Роль мертвых концов.
Универсальность критических индексов

Глава 13.
ПРЫЖКОВАЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ

Механизм прыжковой электропроводности.
Сетка сопротивлений.
Свойства сетки сопротивлений.
Снова задача сфер.
Вычисление удельного сопротивления.
Обсуждение результата.

Глава 14.
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНАЯ

Некоторые приложения.
Что же такое теория протекания?.

В этой части речь идёт о наиболее интересных с точки зрения физики аспектах теории протекания — о поведении различных величин в непосредственной близости к порогу протекания. В предшествующих частях говорилось, что такие физические величины, как спонтанная намагниченность ферромагнетика с примесями или электропроводность сетки с заблокированными узлами обращаются в нуль в пороговой точке. В этой части обсуждаются законы, которые описывают их поведение вблизи порога. Для вывода этих законов необходимо понимать геометрические свойства бесконечного кластера.

Глава 11.

Решётка Бете**

В гл. 5 было показано, что пороги протекания некоторых плоских задач могут быть определены точно. Однако нигде не говорилось, что можно найти также функцию $P(x)$ — вероятность того, что некоторый узел принадлежит бесконечному кластеру. В настоящее время точные выражения для этой функции (так же, как и для электропроводности сетки) неизвестны ни для плоских, ни для трёхмерных задач. Исключение представляет так называемая решётка Бете, которую, как будет показано ниже, следует классифицировать как решётку в пространстве с бесконечным числом измерений. Ниже излагаются постановка и решение задачи узлов на решётке Бете.

11.1. Слухи

«Что ж за вздор, в самом деле, разнесли по городу? Что же за направление такое, что не успеешь поворотиться, а тут уже и выпустят историю, а хотя бы какой-нибудь смысл был...» — возмущался Николай Васильевич Гоголь, описывая, как нелепая

сплетня, распущенная двумя дамами, погубила многообещающую авантюру Чичикова. — «Это предприятие удалось произвести им с небольшим в полчаса. Город был решительно взбунтован: всё пришло в брожение, и хотя бы кто-нибудь мог что-либо понять».

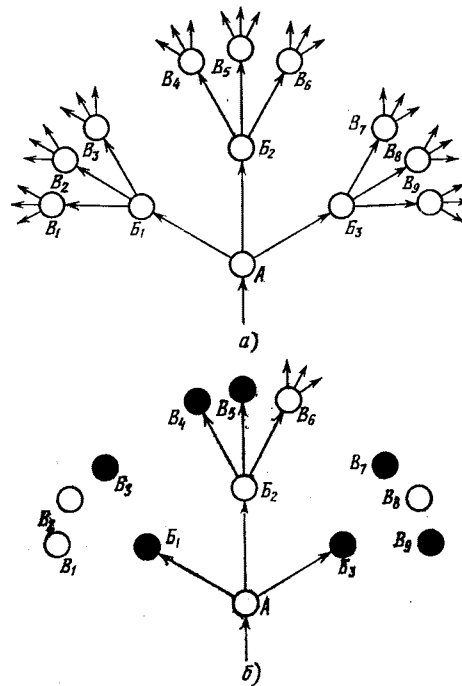


Рис. 11.1. Решётка Бете с $q = 3$. Светлые кружки — люди категории S , тёмные — категории T .

Слухи, действительно, распространяются со сказочной быстротой. И это перестаёт быть удивительным, если рассмотреть предлагаемую математическую модель.

Модель изображена на рис. 11.1, а. Допустим, что некая «во всех отношениях приятная дама», обозначенная кружком A , общилась сведения трём своим знакомым: B_1 , B_2 и B_3 . Каждый из них передал их ещё трём своим знакомым, так что «из вторых

рук» информацию получили 9 человек, обозначенные кружками B . Каждый из этих 9 человек тоже передал информацию трём своим знакомым, в результате чего с ней ознакомились ещё 27 человек. Легко подсчитать, что «из десятых рук» сведения получают $3^{10} = 59049$ человек! Если предположить, что на передачу информации трём своим знакомым каждый человек затратит 20 мин, то получится, что всё дело займёт $200 \text{ мин} = 3 \text{ ч } 20 \text{ мин}$.

Разумеется, эта модель сильно упрощает реально происходящий процесс. Считается, что число знакомых у всех людей одно и то же. Кроме того, предполагается, что каждый человек получает сведения только от одного человека. Это значит, что в каждый кружок (рис. 11.1, а) входит только одна линия. Благодаря этому свойству модель напоминает дерево, бесконечно разветвляющееся во все стороны. Каждый кружок можно считать основанием своего дерева, причём деревья, выросшие, например, из кружков B_1 , B_2 и B_3 , не имеют между собой ни одного общего кружка. То же самое можно сказать и о деревьях, основаниями которых являются кружки B , и т. д.

В научной литературе эта модель так и называется — *дерево*. Её называют также *решёткой Бете* по имени знаменитого физика Ганса Бете. Кружки, изображённые на рис. 11.1, а являются узлами этой решётки. Число линий, выходящих из каждого узла решётки Бете, может быть произвольным (но одинаковым для всех узлов). Обозначим это число через q . На рис. 11.1, а изображена решётка с $q = 3$.

Вспомним теперь, что большинство людей имеет собственную точку зрения и не участвует в распространении слухов. Разде-

лим всех людей на две категории: к категории C , изображаемой на рисунке светлыми кружками, отнесём людей, передающих полученную информацию своим знакомым (рис. 11.1, б). Из этих кружков может выходить q стрелок. К категории T , изображаемой чёрными кружками, отнесём людей, которые не участвуют в распространении слухов. Из чёрных кружков (рис. 11.1, б) не выходит ни одной стрелки.

Наличие чёрных кружков сильно влияет на продвижение слуха. Рассмотрим конфигурацию, изображённую на рис. 11.1, б. Из трёх кружков, B_1, B_2, B_3 , лишь один оказался светлым и передал слух дальше. Кружки B_1, B_2 и B_3 с удовольствием бы посплетничали, но B_1 и B_3 ничего им не передали. Из B_4, B_5, B_6 к C принадлежит лишь B_6 . Таким образом, из вторых рук вместо 9 человек слух дошёл лишь до трёх, причём в следующие руки его передаст лишь B_6 .

Допустим, что рассматриваемая система ничем не ограничена и имеет бесконечное количество кружков. Тогда можно поставить следующий вопрос. Умрёт после конечного числа передач вышедший из точки A слух или он уйдёт на бесконечное расстояние от A и в бесконечной системе станет достоянием бесконечного числа лиц? Как видно из рис. 11.1, б, это зависит от относительного количества светлых и тёмных кружков и от конфигураций, возникающих в окрестности узла.

По существу речь идёт о задаче узлов теории протекания, только сформулированной на решётке Бете. Пусть доля людей категории C равна x . Это значит, что выбранный наугад человек с вероятностью x окажется принадлежащим к категории C и с

вероятностью $1 - x$ — к категории T . Вопрос, который нужно решить, состоит в следующем. Какова вероятность $P(x)$ того, что слух, сообщённый выбранному наугад человеку, станет достоянием бесконечного числа лиц? Ясно, что при малых значениях x эта вероятность равна нулю, но, однако, она становится отличной от нуля, начиная с некоторого критического значения $x = x_c$.

11.2. Решение задачи узлов на решётке Бете

Вместо функции $P(x)$ удобно ввести вероятность того, что слух, сообщённый выбранному наугад человеку, не сделается достоянием бесконечного числа лиц. Обозначим эту вероятность через $Q(x)$. Очевидно, что

$$Q(x) = 1 - P(x), \quad (11.1)$$

так как рассматриваемые события образуют полную систему событий.

Для $Q(x)$ можно составить алгебраическое уравнение. Рассуждать нужно следующим образом. Передача слуха может прерываться по двум несовместимым причинам. Первая состоит в том, что выбранный наугад человек окажется из категории T . Вторая причина состоит в том, что хотя человек окажется из категории C и передаст слух q людям, все каналы, ведущие от этих людей, на разных этапах прервутся. Таким образом, вероятность Q представляет сумму вероятностей двух несовместимых событий. Вероятность того, что выбранный наугад человек окажется из категории T , равна $1 - x$. Вероятность того, что он окажется из категории C ,

но передача слуха прервётся на более далёких этапах, обозначим пока через W' . Тогда

$$Q = 1 - x + W'.$$

Перейдем теперь к вероятности W' . Исход, который она описывает, является следствием одновременного осуществления двух событий:

1. выбранный наугад человек оказывается C (вероятность этого события равна x),
2. все q каналов, ведущие от знакомых выбранного наугад человека, на каком-нибудь этапе прерываются.

Очевидно, что эти два события независимы. Поэтому вероятность W' равна произведению вероятностей: $W' = xW(x)$, так что

$$Q = 1 - x + xW(x), \quad (11.2)$$

где $W(x)$ — вероятность того, что все q каналов на каком-то этапе прерываются (разумеется, этот этап может быть разным у разных каналов).

Рассмотрим один из q каналов, начинающихся с одного из знакомых выбранного наугад человека. Событие, состоящее в том, что этот канал где-то прерывается, эквивалентно тому, что слух, сообщенный данному знакомому, не станет достоянием бесконечного числа лиц. По определению вероятность этого события равна $Q(x)$.

Для дальнейшего оказывается очень важным, что деревья, основаниями которых являются q знакомых выбранного наугад чело-

века, не имеют общих кружков. Отсюда следует, что если у одного дерева имеется определённая конфигурация светлых и тёмных кружков, то это не влияет на вероятность любой конфигурации кружков у других деревьев. (Очевидно, что при наличии общих кружков последнее утверждение было бы неверным.) Поэтому события, состоящие в том, что слух прерывается в одном и в другом каналах, независимы.

Таким образом, вероятность того, что все q каналов прерываются, равна произведению вероятностей того, что прерывается по отдельности каждый из q каналов:

$$W(x) = [Q(x)]^q. \quad (11.3)$$

Подставляя формулу (11.3) в (11.2), получаем уравнение для $Q(x)$:

$$Q(x) = 1 - x + x[Q(x)]^q. \quad (11.4)$$

Заметим, что решающим обстоятельством, позволившим свести задачу к алгебраическому уравнению (11.4), явилась независимость различных каналов. Это свойство присуще исключительно решётке Бете, и потому использованный выше метод в применении к обычным решёткам не приводит к успеху, хотя часто употребляется для получения приближённо правильного решения.

Перейдём к анализу уравнения (11.4). Оно имеет смысл при всех x в интервале $0 \leq x \leq 1$. Перепишем его через $P(x) = 1 - Q(x)$. Получим

$$[1 - P(x)]^q x + P(x) - x = 0. \quad (11.5)$$

Одним из решений (11.5) является $P(x) = 0$ при всех x , однако уравнение (11.5) при $q > 1$ нелинейное и имеет другие решения. В частности, при $x = 1$ решением является также $P(1) = 1$, причем физический смысл имеет именно второе решение, так как если все кружки светлые, то вероятность P должна равняться единице, а не нулю.

Решения уравнения (11.5) легко найти при $q = 2$. Решений в этом случае два: $P(x) = 0$ и $P(x) = 2 - \frac{1}{x}$. При $x > \frac{1}{2}$ физический смысл имеет второе решение. При $x < \frac{1}{2}$ оно становится отрицательным и не имеет смысла. Итак, при $q = 2$ смысл имеет следующее решение:

$$P(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2 - \frac{1}{x} & \text{при } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \quad (11.6)$$

Порог протекания x_c равен в этом случае $\frac{1}{2}$.

Аналогичное решение существует при всех $q > 1$, однако порог протекания x_c зависит от q . В общем случае можно найти x_c и вид $P(x)$ при x , близком к x_c , заранее предположив $P(x) \ll 1$, что всегда справедливо в окрестности порога протекания. Член $(1 - P)^q$ в уравнении (11.5) можно разложить по формуле бинома

$$(1 - P)^q = 1 - qP + \frac{q(q - 1)}{2}P^2 - \dots \quad (11.7)$$

Так как $P \neq 1$, каждый последующий член значительно меньше предыдущего. Поэтому подставим формулу (11.7) в уравнение (11.5), считая, что в правой части (11.7) есть только три написанных члена. Получим

$$\frac{q(q - 1)}{2}xP^2 = qPx - P.$$

Предполагая $P \neq 0$, поделим обе части этого равенства на P и найдём

$$P = \frac{(x - \frac{1}{q})2}{x(q - 1)} \quad (11.8)$$

При $q = 2$ формула (11.8) совпадает с (11.6). Это решение обращается в нуль при $x = \frac{1}{q}$. Отсюда следует, что $x_c = \frac{1}{q}$. Решение (11.8) имеет смысл при $q > 1$, $x > \frac{1}{q}$ и только при значениях x , очень близких к $\frac{1}{q}$. Поэтому в знаменателе выражения (11.8) можно положить $x = \frac{1}{q}$. Окончательно получаем

$$P(x) = \frac{(x - \frac{1}{q})2q}{q - 1}. \quad (11.9)$$

Выражение (11.9) описывает функцию $P(x)$ вблизи порога протекания.

11.3. Обсуждение результатов

При $q = 1$ функция $P(x) = 0$ при всех x в интервале $0 \leq x < 1$, и никаких других решений уравнение (11.5) в этом интервале не имеет. При $q = 1$ и $x = 1$ уравнение (11.5) удовлетворяется любым значением P .

При $q = 1$ решётка Бете превращается в линейную цепочку узлов. В такой цепочке сколь угодно малое количество чёрных узлов прерывает протекание по белым узлами. Поэтому естественно, что при всех x в интервале $0 \leq x < 1$ распространение слухов обязательно прерывается, т. е. $P(x) = 0$. Значение x_c для линейной цепочки равно единице.

Как было показано в предыдущем разделе, в общем случае $x_c = \frac{1}{q}$. Этот результат можно было предвидеть заранее. В рассматриваемой задаче каждый человек передаёт слух q своим знакомым. Среднее число людей категории C среди этих знакомых равно qx . Значит, после каждой передачи вместо одного источника информации в среднем возникает qx источников. Таким образом, величина qx является коэффициентом размножения. Для того чтобы процесс не прекращался, необходимо, чтобы коэффициент размножения был больше единицы. Отсюда следует, что критическая концентрация x_c получается из условия $qx_c = 1$, т. е. $x_c = \frac{1}{q}$.

Напомним, что аналогичным образом определяется условие, необходимое для поддержания цепной реакции деления урана. Процесс распространения слухов, по существу, тоже является цепной реакцией и описывается по той же схеме, что и ядерный взрыв.

Интересно сравнить полученное значение x_c с результатами решёточных задач в пространствах с большим числом измерений. Приближённое вычисление порога протекания задачи узлов производилось для так называемых гиперрешёток. Это решётки такого же типа, как квадратная и простая кубическая, но только в пространстве с большим числом измерений. Координационное число z (число ближайших соседей) для таких решёток определяется формулой $z = 2d$, где d — размерность пространства (при $d = 2$ получаем $z = 4$, а при $d = 3$ получаем $z = 6$). Вычисления порога протекания x_y производились при $d = 4, 5, 6$. Оказалось, что результаты хорошо описываются формулой

$$x_y = \left(1 + \frac{6,3}{d^2}\right) \frac{1}{z - 1} \quad (11.10)$$

При достаточно больших d вторым членом в скобке можно пренебречь, и $x_y = \frac{1}{z-1}$. Но для решётки Бете $z - 1 = q$. Ведь в каждый узел этой решётки одна связь входит и q связей из него выходит.

Отсюда видно, что порог протекания на решётке Бете ($x_c = \frac{1}{q}$) такой же, как на гиперрешётке с очень большим числом измерений. Таким образом, решётка Бете как бы соответствует бесконечномерному пространству.

Решётка Бете является единственной системой, для которой удалось точно найти вид $P(x)$ вблизи порога протекания. Оказалось (см. (11.9)), что в этом случае $P(x)$ обращается в нуль при $x \rightarrow x_c$ по линейному закону $P \sim (x - x_c)$. Как будет видно из дальнейшего, это специфическое свойство решётки Бете, а также всех решёток в пространстве с большим числом измерений.

Упражнение

1. Разберите задачу связей на решётке Бете. Все узлы считайте одинаковыми, а связи целыми и разорванными. Пусть доля целых связей равна x . Найдите функцию $P(x)$, определённую так же, как и раньше.

Глава 12.

Структура бесконечного кластера

12.1. Модель Шкловского — де Жена

Рассмотрим для определённости задачу узлов и допустим, что концентрация неблокированных узлов немного выше пороговой, так что существует бесконечный кластер. Он представляет собой бесконечные цепочки из связанных друг с другом узлов. Если соединить все связанные узлы бесконечного кластера отрезками прямых, то получится набор пересекающихся друг с другом ломаных линий (см. рис. 4.2, где показана одна такая линия).

Структурой бесконечного кластера называют его геометрию в масштабах гораздо больших, чем период решётки. В таких масштабах изломы, происходящие в отдельных узлах решётки, не воспринимаются глазом и цепочка представляется плавно изогнутой линией.

На рис. 12.1 изображён небольшой фрагмент бесконечного кластера. На концах A и B кластер не кончается — он уходит налево и направо на бесконечное расстояние. Введём теперь следующую классификацию точек и линий бесконечного кластера. Участки

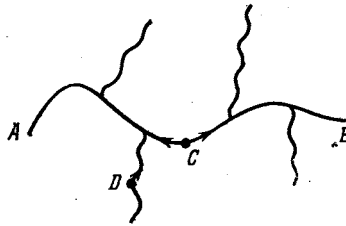


Рис. 12.1. Фрагмент бесконечного кластера с мёртвыми концами.

бесконечного кластера делятся на *скелет* и *мёртвые концы*.

Считается, что точка принадлежит скелету бесконечного кластера, если по крайней мере два пути, выходящие из неё в разные стороны, позволяют уйти на бесконечное расстояние. Такой точкой является, например, точка C на рис. 12.1. Из неё можно уйти на бесконечное расстояние, двинувшись и в правую, и в левую стороны. Если только один путь, выходящий из точки, ведёт на бесконечное расстояние, то эта точка принадлежит мёртвому концу. Например, из точки D на рис. 12.1 можно уйти на бесконечное расстояние, двигаясь только вверх. Движение вниз приводит в тупик. Поэтому считается, что точка D лежит на мёртвом конце.

Отбросим мысленно все мёртвые концы и постараемся представить, как встроен скелет бесконечного кластера.

Простейшая модель скелета была предложена независимо друг от друга советским физиком Б. И. Шкловским и французским физиком П. де Женем. Для плоской задачи эта модель представляет собой нечто вроде очень большой рыболовной сети, старой и изрядно потрёпанной. Она уже потеряла строгую периодичность, её верёвки не натянуты, некоторые узлы в ней порваны, другие съехали со своего места, но тем не менее «в среднем» это сеть

(рис. 12.2).

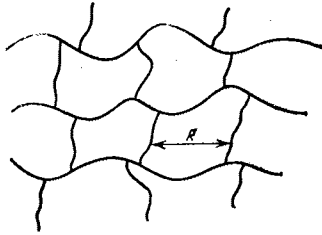


Рис. 12.2. Скелет бесконечного кластера.

Характерный линейный размер ячейки этой сети R называется *радиусом корреляции* бесконечного кластера. Он резко возрастает с приближением к порогу протекания:

$$R = \frac{l}{|x - x_c|^\nu}. \quad (12.1)$$

Здесь l — длина, равная по порядку величины периоду решётки, а ν — положительное число, которое называется *индексом радиуса корреляции*. Таким образом, по мере приближения к порогу протекания сетка становится всё более и более редкой.

Существование обращающегося в бесконечность радиуса корреляции является общим свойством всех критических явлений. То, что он обращается в бесконечность именно по степенному закону (12.1), не является строго доказанным, но лежит в основе современных представлений о критических явлениях и, по видимому, хорошо подтверждается экспериментальными данными.

Радиус корреляции имеет смысл и при $x < x_c$, т. е. ниже порога. В этой области он описывает *максимальный размер конечных кластеров*. Если $x \rightarrow x_c$ со стороны меньших значений ($x < x_c$),

то радиус корреляции тоже обращается в бесконечность по закону (12.1). Это означает, что при подходе к порогу протекания снизу конечные кластеры неограниченно увеличивают свои размеры и при $x = x_c$ сливаются в бесконечный кластер. Таким образом, зависимость $R(x)$ имеет вид, схематически показанный на рис. 12.3.

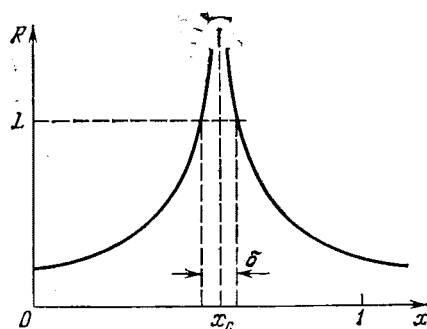


Рис. 12.3. Зависимость радиуса корреляции от x . Показана ширина критической области δ для квадрата $L \times L$ (см. следующий раздел).

В случае объёмных задач модель Шкловского — де Жена имеет аналогичный вид. Она похожа на сильно испорченный проволочный каркас трёхмерной решётки, причём средняя длина одной ячейки выражается формулой (12.1). Следует только иметь в виду, что численные значения индексов радиуса корреляции для плоских и объёмных задач разные.

Рассмотрим теперь, к каким следствиям приводит представление о сеточной структуре бесконечного кластера.

12.2. Роль размеров системы

В гл. 1, 2 и 3 подчёркивалось, что понятие порога протекания имеет смысл лишь в бесконечной системе. В конечной системе порог протекания меняется от образца к образцу, т. е. является величиной случайной. Однако, значения, которые принимает эта случайная величина, с подавляющей вероятностью попадают в некоторую область с шириной $\delta(\mathcal{N})$, которая называется *критической областью*. При увеличении числа узлов в системе \mathcal{N} ширина этой области уменьшается по степенному закону (см. формулу (1.8)), так что при $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ порог протекания приобретает чёткий смысл, превращаясь из случайной величины в величину достоверную.

В начальных главах книги эти сведения сообщались практически без всякого вывода. Представление о радиусе корреляции позволяет их понять и получить формулу (1.8).

Для определённости обсудим эксперимент с экранной сеткой, имеющей размеры $L \times L$, схема которого изображена на рис. 1.1. Допустим, что сделано много опытов, использующих разные случайные последовательности блокируемых узлов, результатом которых явился набор порогов протекания. Напомним, что конфигурации заблокированных узлов, полученные в разных опытах, совершенно не похожи друг на друга.

Удобный способ рассуждения состоит в следующем. Вообразим *бесконечную* экранную сетку с заданной долей x неблокированных узлов. Представим, что на разные участки этой сетки накладывается квадрат, имеющий размеры $L \times L$, и изучается

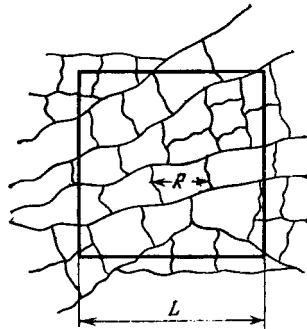


Рис. 12.4. Квадрат, наложенный на бесконечную сетку при $R \ll L$ и $x > x_c$

протекание левой стороны этого квадрата на правую по неблокированным узлам, оказавшимся внутри этого квадрата (рис. 12.4). Накладывая квадрат на разные участки бесконечной сетки, можно перебрать результаты разных опытов с конечной сеткой.

В бесконечной экранной сетке протекание возникает точно при $x = x_c$, но, как мы сейчас увидим, это совершенно не означает, что при $x > x_c$ обязательно есть протекание в квадрате $L \times L$.

При $x > x_c$ в бесконечной системе существует бесконечный кластер. Изобразим его скелет в виде рыболовной сети, показанной на рис. 12.2. Для дальнейшего крайне важно соотношение между радиусом корреляции R и длиной квадрата L . Примем сначала, что L значительно превосходит R . Тогда (рис. 12.4) внутри квадрата находится много ячеек сети бесконечного кластера, который обеспечивает протекание между сторонами квадрата. Эти ячейки могут иметь разные размеры, в сети бесконечного кластера могут быть большие дыры, но если в квадрате в среднем должно быть много ячеек, то вероятность того, что в кластере имеется дыра размером в целый квадрат, ничтожно мала. Поэтому делается следующий вывод:

<p>Если $x > x_c$, то порог протекания квадрата не может находиться в области значений x, удовлетворяющей сильному неравенству $L \gg R(x)$. Эта область должна быть выше порога.</p>	(I)
---	-----

Согласно формуле (12.1) при стремлении x к x_c радиус корреляции неограниченно возрастает и при каком-то значении x неизбежно сравнивается с L . Теперь о протекании внутри квадрата ничего определённого сказать нельзя. Всё зависит от конкретной конфигурации заблокированных узлов внутри него.

Пусть теперь $x < x_c$ и радиус корреляции значительно меньше, чем L . При $x < x_c$ радиус корреляции представляет собой максимальную длину конечных кластеров. Если $R \ll L$, то не существует такого кластера, который мог бы связать стороны квадрата. Поэтому делается ещё один определённый вывод:

<p>Если $x < x_c$, то порог протекания квадрата тоже не может находиться в области значений x, удовлетворяющей сильному неравенству $L \gg R(x)$. Эта область должна быть ниже порога.</p>	(II)
--	------

Если $x < x_c$, но величина x очень близка к x_c , то радиус корреляции становится больше, чем L . В этом случае о протекании в квадрате нельзя сказать ничего определённого. В бесконечной системе существуют конечные кластеры размера, большего, чем L , но внутри них есть дыры такого же размера, и всё зависит от конкретной конфигурации заблокированных узлов внутри квадрата.

Теперь можно оценить размер критической области, в которой могут находиться значения порога протекания квадрата $L \times L$. Согласно выводам I и II эта область должна определяться условием $L \lesssim R$. Как видно из рис. 12.3, чем больше L , тем уже эта область и тем теснее она прижата к порогу протекания для бесконечной системы. Ширина области δ определяется условием $R(\delta) = L$. С помощью формулы (12.1) получаем $l/\delta^\nu = L$ или

$$\delta = \left(\frac{l}{L} \right)^{\frac{1}{\nu}} \quad (12.2)$$

Внутри критической области, т. е. при $x - x_c \ll \delta$ пороги протекания квадратов с длиной L распределены однородно (см. рис. 2.4, где показана функция распределения порогов протекания). Точка $x = x_c$ внутри этой области ничем не выделена. Действительно, это точка, в которой наступает протекание в бесконечной системе. Но установить, есть такое протекание или нет, работая с квадратом конечного размера, невозможно. Если $L < R$, то, накладывая квадрат на разные участки бесконечной сетки, нельзя сказать, существуют в этой сетке только конечные кластеры или они уже слились и образуют бесконечный кластер. *Изучение протекания в квадрате конечного размера позволяет лишь определить ширину критической области.*

В этом разделе обсуждались лишь плоские задачи. Однако всё сказанное полностью переносится на задачи объёмные. Ширина критической области для объёмных задач также определяется формулой (12.1). Небольшая разница возникает, если выразить ширину δ не через размер системы L , а через полное число узлов

\mathcal{N} . Дело в том, что $\mathcal{N} = \left(\frac{l}{a}\right)^d$, где a — период решётки, а d — размерность пространства. Поэтому согласно (12.2)

$$\delta(\mathcal{N}) = \frac{C}{\mathcal{N}^{\frac{1}{\nu d}}}, \quad (12.3)$$

где C — численный коэффициент, который не может быть определён из столь простых соображений. В плоском случае ($d = 2$) формула (12.3) совпадает, с формулой (1.8). Именно с помощью этой формулы в результате исследования найденной на ЭВМ зависимости $\delta(\mathcal{N})$ был впервые определен индекс радиуса корреляции плоской задачи. Оказалось, что $\nu_2 = 1,33$. (Здесь и ниже число 2 показывает, что речь идет об индексе двумерной системы.) Для трёхмерных задач индекс ν иной: $\nu_3 = 0,8 \div 0,9$. (Число 3 означает, что индекс относится к трёхмерным задачам.)

12.3. Электропроводность вблизи порога протекания

Рассмотрим для определённости двумерные или трёхмерные сетки с заблокированными узлами. Как говорилось в начальных главах книги, электропроводность таких сеток отлична от нуля при $x > x_c$ и обращается в нуль на пороге протекания x_c . Экспериментальные данные, а также данные, полученные с помощью расчёта на ЭВМ, показывают, что удельная электропроводность сеток обращается в нуль по закону

$$\sigma(x) = \sigma_0(x - x_c)^t, \quad (12.4)$$

где множитель σ_0 по порядку величины равен удельной электропроводности сетки без заблокированных узлов. Величина t называ-

ется критическим индексом электропроводности и является предметом очень тщательного изучения, преимущественно с помощью расчетов на ЭВМ. (В одном из последних расчетов, например, использовалась квадратная сетка, имеющая 800×800 узлов.) Установлено, что для двумерных сеток $t_2 = 1,3$, а для трёхмерных $t_3 = 1,6 \div 1,7$.

Сеточная модель бесконечного кластера позволяет вывести формулу (12.4) и связать индекс t с индексом радиуса корреляции. Электрический ток течёт только по бесконечному кластеру, причём именно по его скелету. В мёртвых концах, прикреплённых к скелету лишь с одной стороны, тока нет. Если сделать электрический ток достаточно сильным, так чтобы проволока, по которой он течёт, светилась, то в темноте скелет бесконечного кластера можно наблюдать визуально: освещенные каналы на тёмном фоне. Вдали от порога вся сетка светится более или менее равномерно, вблизи порога расстояние между освещенными каналами увеличивается и, наконец, на самом пороге свечение совсем прекращается — ток через систему прервался.

Вычислим удельную электропроводность скелета бесконечного кластера. Следует иметь в виду, что это вычисление не может претендовать на правильный учёт численных множителей. Оно позволяет лишь получить зависимость σ от $x - x_c$. Эта зависимость не изменится, если мысленно заменить неправильную и нерегулярную сеть идеальной сеткой с периодом, равным R .

Рассмотрим сначала плоский случай (см. рис. 12.4). Удельное сопротивление равно сопротивлению квадрата с единичной длиной. Число проволочек, пересекающих этот квадрат, равно $\frac{1}{R}$, где

R — расстояние между проволочками, которое выражается формулой (12.1). Обозначим сопротивление одной проволочки, имеющей единичную длину, через ρ_0 . Все проволочки включены параллельно. Следовательно, удельное сопротивление

$$\rho = \frac{\rho_0}{\frac{1}{R}} = \rho_0 R,$$

а удельная электропроводность

$$\sigma = \rho^{-1} = \rho_0^{-1} R^{-1} \quad (12.5)$$

Подставляя (12.2), получим

$$\sigma = \sigma_2 (x - x_c)^\nu \quad (12.6)$$

где $\sigma_2 = \rho_0^{-1} l^{-1}$.

В трёхмерном случае нужно вычислить удельное сопротивление проволочного каркаса, изображающего, например, простую кубическую решётку с периодом R (от типа решётки зависит лишь численный коэффициент). Удельное сопротивление равно сопротивлению кубика с единичной длиной ребра. Число параллельно соединённых проволочек; проходящих через грань такого кубика, равно $\frac{1}{R^2}$. Поэтому удельное сопротивление

$$\rho = \frac{\rho_0}{\left(\frac{1}{R}\right)^2} = \rho_0 R^2, \quad (12.7)$$

а удельная электропроводность равна

$$\sigma = \rho_0^{-1} R^{-2} = \sigma_3 (x - x_c)^{2\nu}, \quad (12.8)$$

где $\sigma_3 = \rho_0^{-1} l^{-2}$.

Во избежание недоразумений следует обратить внимание на то, что удельная электропроводность σ в двумерном и трёхмерном случаях имеет разную размерность. В двумерном случае она измеряется в Ом^{-1} , а в трёхмерном — в $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$.

Множители σ_2 и σ_3 порядку величины представляют собой удельные электропроводности двумерной и трёхмерной сеток без блокированных узлов. Действительно, как видно из формул (12.5) и (12.8), удельная электропроводность $\sigma(x)$ превращается в σ_2 или в σ_3 при $R = l$, т. е. когда сетка бесконечного кластера совпадает с исходной сеткой, на которой ставится задача. Таким образом, величина σ_0 в формуле (12.4) в двумерном случае равна σ_2 , а в трёхмерном — σ_3 .

Сравнивая формулы (12.5) и (12.6) с формулой (12.4), получаем, что в двумерном случае $t = \nu$, а в трёхмерном $t = 2\nu$. Используя $\nu_2 = 1,3$ и $\nu_3 = 0,8 \div 0,9$, получим $t_2 = 1,3$, $t_3 = 1,6 \div 1,8$, что очень близко к приведенным выше данным. Это совпадение свидетельствует в пользу модели Шкловского — де Жена.

Упражнение

1. Модель скелета бесконечного кластера может быть обобщена следующим образом. Представим, что проволоочки, образующие скелет, очень извилисты (рис. 12.5). Расстояние между точками их пересечения по-прежнему равно $R(x)$ и выражается формулой (12.1). Однако, если выпрямить отрезок проволоочки, заключенный между двумя точками пересечений, то окажется, что его длина значительно превосходит R . Пред-

ставим эту длину \mathcal{L} в виде

$$\mathcal{L} = \frac{l}{(x - x_c)^\zeta} \quad (x > x_c),$$

где $\zeta > \nu$. При $x \rightarrow x_c$ отношение $\frac{\mathcal{L}}{R} = (x - x_c)^{-(\zeta - \nu)}$ стремится к бесконечности.

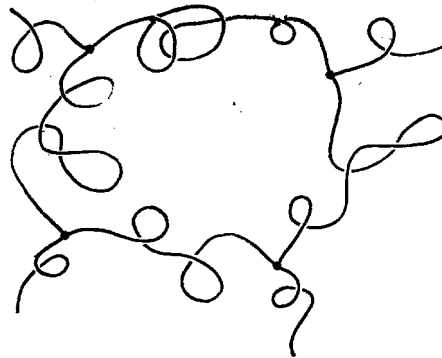


Рис. 12.5. Скелет бесконечного кластера с учётом «извилистости».

Длина \mathcal{L} имеет смысл только при условии $\mathcal{L} \gg R$, т. е. $\zeta > \nu$. Однако существует доказательство того, что $\zeta = 1$. Поэтому предлагаемое обобщение модели Шкловского – де Жена (на самом деле это обобщение было сделано самими авторами модели) разумно, лишь если $\nu < 1$. В двумерном случае $\nu = 1,3$, и потому никакой «извилистости» быть не должно. Но в трёхмерном случае $\nu < 1$, и есть основания думать, что «извилистость» скелет бесконечного кластера действительно существует.

Выразите критический индекс электропроводности t через индексы ζ , и ν в трёхмерном случае, используя обобщённую модель.

12.4. Функция $P(x)$ вблизи порога протекания. Роль мёртвых концов

Как и электропроводность, функция $P(x)$, представляющая долю узлов, принадлежащих бесконечному кластеру обращается в нуль при $x = x_c$. Исследования показали, что вблизи порога эта функция имеет вид

$$P(x) = D(x - x_c)^\beta, \quad (12.9)$$

где D — численный коэффициент порядка единицы, а β — еще один критический индекс. Установлено, что для двумерных задач $\beta_2 = 0,14$, а для трёхмерных $\beta_3 = 0,4$. Эти результаты получены главным образом с помощью ЭВМ.

В функцию $P(x)$ дают вклад все узлы бесконечного кластера — и принадлежащие скелету, и принадлежащие мёртвым концам. С помощью модели бесконечного кластера можно определить, каких узлов больше. Допустим сначала, что мёртвых концов совсем нет, и вычислим вклад в $P(x)$ от скелета бесконечного кластера.

В двумерном случае на каждую ячейку бесконечного кластера приходится порядка $\frac{R}{a}$ узлов, принадлежащих скелету, где a — период решётки (как и в предыдущем разделе, здесь делается оценка, не претендующая на установление численных коэффициентов). Площадь ячейки порядка R^2 и, следовательно, полное число всех узлов в ячейке порядка $\frac{R^2}{a^2}$. Отсюда следует, что доля узлов, принадлежащих скелету бесконечного кластера,

$$P_{\text{СК}}(x) \sim \frac{a}{R} \sim (x - x_c)^\nu \quad (12.10)$$

Здесь означает равенство по порядку величины (без учёта численных коэффициентов порядка единицы).

В трёхмерном случае на каждую ячейку бесконечного кластера тоже приходится $\frac{R}{a}$ узлов, принадлежащих скелету, но полное число узлов в ячейке порядка $(\frac{R}{a})$. Поэтому в трёхмерном случае

$$P_{\text{СК}}(x) \sim \left(\frac{a}{R}\right) \sim (x - x_c)^{2\nu}. \quad (12.11)$$

Сравнивая формулы (12.10) и (12.11) с формулами (12.6) и (12.8), получаем, что доля узлов, принадлежащих скелету бесконечного кластера, по порядку величины совпадает с функцией $\frac{\sigma(x)}{\sigma_0} = (x - x_c)^t$

Сравнивая (12.10) и (12.11) с формулой (12.9), видим, что

$$\frac{P_{\text{СК}}(x)}{P(x)} \sim (x - x_c)^{\nu_2 - \beta_2}$$

в двумерном случае, а в трёхмерном случае

$$\frac{P_{\text{СК}}(x)}{P(x)} \sim (x - x_c)^{2\nu_3 - \beta_3}$$

Вспомним, что $\nu_2 = 1,3$, а $\nu_3 \approx 0,9$. Следовательно, $\nu_2 - \beta_2 = 1,2$, а $2\nu_3 - \beta_3 \approx 1,4$. Таким образом, и в двумерном, и в трёхмерном случаях отношение $\frac{P_{\text{СК}}(x)}{P(x)}$ быстро стремится к нулю при $x \rightarrow x_c$. Это значит, что узлы, образующие скелет бесконечного кластера, составляют ничтожную долю от полного числа узлов, принадлежащих бесконечному кластеру. Основная «масса» бесконечного кластера сосредоточена в мёртвых концах и совершенно бесполезна с точки зрения электропроводности. Поэтому вблизи порога протекания $\frac{\sigma(x)}{\sigma_0} \ll P(x)$ (см. рис. 3.5). Однако именно

мёртвые концы определяют спонтанную намагниченность ферромагнетика с примесями вблизи порога протекания (см. гл. 3).

12.5. Универсальность критических индексов

Мы познакомились с тремя критическими индексами: ν , t и P , которые описывают поведение различных величин в окрестности порога протекания. Это поведение также называется критическим, так как функции $R(x)$, $\sigma(x)$ и $\beta(x)$ имеют при $x = x_c$ особые точки. Например, функция $R(x)$ обращается в бесконечность, у функции $P(x)$ первая производная в точке x_c имеет разрыв. С левой стороны она равна нулю, а с правой обращается в бесконечность. У функции $\sigma(x)$ имеет разрыв вторая производная. В теории протекания известно много других величин, имеющих критическое поведение, и, соответственно, много других критических индексов.

Для каждого из обсуждавшихся выше критических индексов приводились два значения: для двумерной и для трёхмерной задач. Но ведь существует великое множество и двумерных, и трёхмерных задач. Например, существуют трёхмерные задачи узлов, связей, сфер, задача об определении уровня протекания в случайном потенциале и многие другие. О каких же индексах шла речь? Теперь мы подходим, пожалуй, к самому интересному моменту в теории протекания. Согласно современным представлениям *критические индексы для всех задач в пространстве с одной и той же размерностью одинаковы*. (Среди задач, упомянутых в этой книге, исключение представляет только задача об ориентирован-

ном протекании.) Утверждение об универсальности критических индексов является скорее принятым, чем строго доказанным. Однако многочисленные проверки этого утверждения, выполненные с помощью ЭВМ, не смогли его опровергнуть.

В чем физические причины универсальности индексов? Видимо, в том, что индексы определяются структурой кластеров в окрестности порога протекания. Основную роль при этом играют геометрические свойства кластеров, проявляющиеся на больших расстояниях (порядка радиуса корреляции). Вблизи пороговой точки эти расстояния намного превосходят период решётки (в случае решёточных задач) или радиус сферы (в случае задачи сфер). Поэтому геометрия кластеров не зависит от того, на какой решётке задана задача. Задача может быть вообще не решёточной, а заданной на узлах, случайно расположенных в пространстве, и это тоже не повлияет на структуру больших кластеров. Но, разумеется, размерность пространства очень сильно сказывается на геометрии кластеров, так как обеспечить, например, «развязку» линий в трёхмерном пространстве гораздо легче, чем в двумерном. По этим причинам критические индексы не зависят от типа задачи, но зависят от размерности пространства.

Интересно заметить, что изменение критических индексов с увеличением размерности пространства происходит до размерности 6. Начиная с шестимерного пространства, индексы не меняются с увеличением размерности, причём индекс $\beta = 1$, как у решётки Бете. При $d \geq 6$ задача о критических индексах значительно упрощается и допускает точное решение.

Итак, в отличие от порогов протекания, которые существенно

зависят от типа задачи, критические индексы обладают определенной универсальностью. Отсюда следует простой вывод. Если результаты физического эксперимента трактуются с помощью теории протекания, а микроскопическая структура исследуемой системы не вполне ясна, то прежде всего следует сравнивать с теорией критические индексы, так как они почти ни от чего не зависят. Именно так и поступают при анализе экспериментальных данных по электропроводности в гетерогенных материалах (см. гл. 9).

Идея универсальности критических индексов заимствована теорией протекания у теории фазовых переходов второго рода (к фазовым переходам второго рода относятся, например, происходящие при повышении температуры переход металла из сверхпроводящего состояния в нормальное и переход ферромагнетика в неферромагнитное состояние). Вблизи точки фазового перехода второго рода так же, как вблизи порога протекания, образуются области большого размера, отличающиеся друг от друга своими свойствами. Разница состоит в том, что границы этих областей не «заморожены», как в теории протекания, а меняются со временем благодаря тепловому движению. Размер областей также называется радиусом корреляции и выражается формулой (12.1).

Из теории фазовых переходов пришла и другая важная идея — гипотеза подобия. В применении к теории протекания она состоит в следующем. Допустим, что сделаны фотографии различных участков сетки с заблокированными узлами при двух значениях a , равных x_1 и x_2 . Оба значения находятся по одну сторону от x_c и близки к x_c . Пусть, например, $x_1 - x_c > x_2 - x_c > 0$. При $x = x_1$ радиус корреляции $R_1 = l(x - x_c)^{-\nu}$, а при $x = x_2$ он равен

$R_2 = l(x - x_c)^{-\nu}$. По условию $R_1 < R_2$ Подобие состоит в том, что если фотографии, сделанные при $x = x_1$ увеличить в отношении $\frac{R_2}{R_1}$ то «в среднем» они ничем не будут отличаться от фотографий, сделанных при $x = x_2$. При этом фотографии предполагаются столь «мелкими», что на них не видны отдельные узлы и связи, а видны лишь большие блоки. Итак, гипотеза подобия заключается в том, что при приближении к порогу протекания крупномасштабная геометрия системы преобразуется подобным образом, причём все линейные размеры увеличиваются пропорционально радиусу корреляции.

Заметим, что модель Шкловского — де Жена удовлетворяет гипотезе подобия, однако гипотеза подобия гораздо шире. Она касается не только скелета бесконечного кластера и вообще не предполагает разбиения на скелет и мёртвые концы.

Математическая формулировка гипотезы подобия позволяет установить связь между критическими индексами ν , β и третьим индексом, который здесь не вводился. Расчёты показывают, что эта связь хорошо выполняется.

Представления о подобии, впервые введённые советскими физиками А. З. Паташинским и В. Л. Покровским, а также американским физиком Л. Кадановым, лежат в основе современной теории фазовых переходов и теории протекания.

С представлениями о подобии связан ряд новых математических методов вычисления критических индексы. Эти методы бурно развивались в последнее десятилетие и достигли определённого совершенства. В настоящее время почти все основные индексы вычислены с их помощью. Однако вычисления столь сложны, что их

трудно изложить в этой книге.

Глава 13.

Прыжковая электропроводность

В предыдущих главах было подробно описано, как применяется теория протекания для вычисления электропроводности систем, состоящих из случайно составленных элементов. При этом каждый элемент был либо проводящим, либо непроводящим, но сопротивление всех проводящих элементов предполагалось одинаковым. Примерами таких систем являются сетки с разорванными связями или блокированными узлами, смесь металлических и диэлектрических шариков и т. д.

Теперь мы обратимся к другому классу систем, которые тоже случайно составлены из различных элементов, но сопротивления этих элементов могут принимать любые значения, заключенные в очень широком интервале от самых малых до чудовищно больших. Оказывается, задача о вычислении сопротивления систем, состоящих из очень большого числа этих элементов, тоже решается с помощью теории протекания. В 1971 г. была построена теория прыжковой электропроводности полупроводников, в основу которой легли идеи протекания. В этой главе мы познакомимся с явлением прыжковой электропроводности и его математическим

описанием.

13.1. Механизм прыжковой электропроводности

Рассмотрим примесный полупроводник, содержащий, например, донорные примеси. Концентрацию примесей будем считать малой по сравнению с критической концентрацией N_c , при которой происходит моттовский переход металл — диэлектрик (см. гл. 8). При этих условиях перекрытие электронных оболочек соседних примесных атомов мало. Поэтому каждый донор можно рассматривать как изолированный водородоподобный атом, внешний электрон которого находится на расстоянии порядка a_B^* от ядра и имеет энергию связи порядка E_B^* (гл. 8). Допустим, что температура столь низка, что тепловой энергии колеблющихся атомов недостаточно, чтобы отрывать электроны от доноров. Как же осуществляется при этом электропроводность?

Представим, что часть доноров не имеет внешнего электрона. Обычно так получается вследствие компенсации примесей (гл. 10). Если полупроводник содержит не только донорные, но и акцепторные примеси, то каждый акцептор забирает электрон у донора. Если акцепторов меньше, чем доноров, то часть доноров сохранит внешний электрон, а другая часть останется без электрона и будет иметь положительный заряд.

Механизм прыжковой электропроводности состоит в том, что электрон «перепрыгивает» с одного донора на другой, который не имел до этого электрона.

Сейчас мы рассмотрим случай, когда потенциальная энергия

внешнего донорного электрона слабо зависит от положения донора в пространстве, т. е. от того, какова конфигурация заряженных примесей, окружающих данный донор. Этот случай соответствует малой концентрации примесей. В типичных для прыжковой проводимости условиях разброс энергий внешних электронов, находящихся на разных донорах, составляет примерно $\frac{1}{10}$ от энергии связи E_B^* .

В такой ситуации основное препятствие для электронного «прыжка» между донорами представляет притяжение электрона к тому донору, которому он принадлежит в начальном состоянии. Если рассуждать с позиций классической механики, то, для того чтобы перевести электрон с внешней орбиты одного донора на внешнюю орбиту другого донора, нужно совершить работу против сил притяжения, так как необходимо удалить электрон на половину расстояния между донорами. После этого электрон начнет притягиваться ко второму донору. Если доноры стоят редко, то эта работа мало отличается от работы по удалению электрона, принадлежащего изолированному донору, на бесконечность, т. е. от энергии связи E_B^* .

В чем же преимущество прыжковой электропроводности перед электропроводностью свободных электронов? Дело в том, что *прыжковая электропроводность — явление квантовое*. Квантовая механика разрешает электрону перейти с одного донора на другой, минуя свободное состояние и не занимая энергию у теплового движения атомов. Такой переход называется туннельным. Закон сохранения энергии остается в силе и для туннельных переходов. Он требует, чтобы энергия электронов в начальном и конечном

состояниях была одинаковой. Поэтому, если благодаря потенциалам окружающих примесей, энергии электрона на первом и втором доноре отличаются, недостающую энергию все равно придется занимать, а лишнюю отдавать. Но эта энергия в 10 раз меньше, чем E_B^* . Поэтому в низкотемпературных условиях прыжковая электропроводность выигрывает у электропроводности свободных электронов.

13.2. Сетка сопротивлений

Следует, однако, иметь в виду, что в рассматриваемых условиях туннельный переход — событие очень мало вероятное. Как говорилось в гл. 8, вероятность найти внешний электрон донора на расстоянии r от донорного ядра убывает с r по закону $e^{-\frac{2r}{a_B^*}}$, где $e \approx 2,72$. Если доноры 1 и 2 находятся друг от друга на расстоянии r_{12} , то вероятность найти внешний электрон донора 1 вблизи ядра донора 2 равна $e^{-\frac{2r_{12}}{a_B^*}}$. Эту величину и содержит вероятность туннельного перехода. Как следует из гл. 8, если концентрация доноров много меньше, чем концентрация N_c , соответствующая переходу диэлектрик — металл, то среднее расстояние между донорами гораздо больше, чем a_B^* , и, как правило, величина $e^{-\frac{2r_{12}}{a_B^*}} = \frac{1}{e^{\frac{2r_{12}}{a_B^*}}}$ очень мала.

Тем не менее между соседними донорами время от времени происходят туннельные переходы. Если к полупроводнику приложить электрическое поле, то окажется, что переходы в направлении

против поля (по направлению действующей силы) происходят чаще, чем переходы по полю. В результате возникает электрический ток, пропорциональный электрическому полю. В этом и состоит интересующее нас явление.

Для вычисления удельного сопротивления полупроводника используют модель, которая называется «сетка сопротивлений». Эта модель формулируется не на языке атомов и туннельных переходов, а на языке обыкновенных электротехнических сопротивлений. Представим, что между каждой парой доноров включено сопротивление. Сами доноры можно вообразить в виде крохотных металлических шариков, к которым припаяны проволочки от множества сопротивлений. Второй конец каждого из этих сопротивлений припаян к другому шарика. В результате получится нечто вроде беспорядочной трёхмерной сетки сопротивлений. Разумеется, если вы захотите на самом деле её собрать, придётся сильно увеличить масштабы системы. Ведь среднее расстояние между донорами порядка 10^{-5} см.

Сопротивления, включённые между донорами, должны быть вычислены, исходя из туннельного тока, который течёт между этими донорами при заданном электрическом поле. Это сводится к решению квантовомеханической задачи, которое мы не будем здесь приводить. Заметим только, что согласно сказанному выше, чем дальше доноры друг от друга, тем меньший ток переносится туннельными переходами между этими донорами при одном и том же поле.

В соответствии с этим, сопротивление \mathcal{R} , связывающее доноры, находящиеся на расстоянии r друг от друга, можно представить в

виде

$$\mathcal{R}(r) = \mathcal{R}_0 e^{\frac{2r_{12}}{a_B^*}}, \quad (13.1)$$

где величина \mathcal{R}_0 одинакова для всех сопротивлений (она может быть порядка 1 Ом). Задача состоит в том, чтобы найти удельное сопротивление системы, состоящей из очень большого (10^{16} – 10^{19}) числа доноров, случайно разбросанных в пространстве.

13.3. Свойства сетки сопротивлений

Главная черта обсуждаемой модели состоит в том, что сопротивления, определяемые формулой (13.1), чудовищно отличаются друг от друга. Среднее расстояние между донорами r_D связано с концентрацией доноров N_D соотношением $\frac{4}{3}\pi r_D^3 N_D = 1$, означающим, что в сфере радиуса r_D в среднем находится один донор. В условиях, в которых обычно наблюдается прыжковая электропроводность, величина r_D превышает a_B^* в 6–12 раз.

Допустим, например, что $r_D = 10a_B^*$. Тогда сопротивление, включенное между донорами, находящимися на расстоянии $1,5r_D$, относится к сопротивлению, включенному между донорами с расстоянием r_D , как $e^{\frac{r_D}{a_B^*}} = e^{10} = 2,2 \cdot 10^4$.

Доноры с взаимным расстоянием r_D встречаются почти так же часто, как и с расстоянием $1,5r_D$. Таким образом, незначительное изменение расстояния между донорами ведет к огромному изменению включенного между ними сопротивления.

В принципе модель сетки предполагает, что сопротивление включено между каждой парой доноров. Однако сопротивления,

включенные между удалёнными донорами, столь велики, что ими несомненно можно пренебрегать. Как правило, эти же доноры связаны цепочкой сопротивлений, идущей по донорам, являющимся ближайшими соседями друг друга. Хотя длина этой цепочки больше, чем кратчайшее расстояние между удалёнными донорами, сопротивление цепочки значительно меньше, чем одно сопротивление, включённое между этими донорами. Таковы уж свойства экспоненты: если $x_1 \gg 1$ и $x_2 \gg 1$, то $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2} \gg e^{x_1} + e^{x_2}$. Таким образом, фактически в рассматриваемой сетке сопротивлений достаточно оставить сопротивления, включённые между четырьмя-пятью ближайшими соседями каждого донора.

13.4. Снова задача сфер

Перейдём теперь к вычислению сопротивления. Предлагается следующий способ рассуждений. Выключим (отпаяем) все сопротивления, которые должны быть между шариками, изображающими доноры, а затем будем их включать в определённой последовательности.

Включим сначала сопротивления, связывающие доноры, расстояние между которыми меньше, чем некоторая длина r' . Это значит, что включаются самые низкоомные (маленькие) сопротивления, величина которых меньше, чем $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_0 e^{\frac{2r'}{a_B^*}}$. Если длина r' значительно меньше, чем среднее расстояние между донорами r_D , то будут включены лишь сопротивления между редкими, аномально близкими друг к другу донорами. Эти сопротивления, как правило, не связаны друг с другом и не могут обеспечить проте-

кание тока через систему.

Будем постепенно увеличивать длину r' , включая всё новые порции сопротивлений. Начиная с некоторого значения $r' = r_c$ включённые сопротивления образуют бесконечный кластер. При $r' > r_c$ система проводит ток и обладает конечным удельным сопротивлением.

Задача об определении r_c есть не что иное, как задача сфер (гл. 7). Действительно, построим вокруг каждого донора сферу радиуса r' . Тогда сопротивления будут включены только между такими донорами, один из которых находится внутри сферы, построенной около второго. Согласно результатам гл. 7 такие доноры впервые образуют бесконечный кластер при условии

$$B_c = \frac{4\pi}{3} N_D r_c^3 = 2,7 \pm 0,1,$$

откуда следует, что

$$r_c = (0,865 \pm 0,015) N_D^{-\frac{1}{3}} \approx 1,39 r_D. \quad (13.2)$$

13.5. Вычисление удельного сопротивления

Согласно сказанному в гл. 12, скелет бесконечного кластера можно вообразить в виде трёхмерной проволочной сетки (см. рис. 12.2) с расстоянием между узлами порядка радиуса корреляции. Для данной задачи каждую проволоку следует считать состоящей из множества шариков, связанных сопротивлениями, а

выражение (12.1) нужно переписать в виде

$$R(r') = r_D \left(\frac{r_D}{|r' - r_c|} \right)^\nu. \quad (13.3)$$

Выражение (13.3) обращается в бесконечность на пороге протекания, причём, согласно идее об универсальности, критический индекс ν такой же, как и для других трёхмерных задач теории протекания ($\nu = 0,8-0,9$). Вдали от порога, при $r' - r_c$ порядка r_D радиус корреляции становится порядка r_D .

При $r' = r_c$ расстояние между узлами сетки бесконечного кластера обращается в бесконечность. Бесконечный кластер в этой точке ещё имеет нулевую плотность. Однако при $r' > r_c$ он образует каналы, пронизывающие всю систему и обеспечивающие конечное удельное сопротивление.

Продолжим процедуру включения сопротивлений. Если включить сопротивления между донорами с расстояниями от r_c до $r_c + ga_B^*$, где g — некоторое число, меньшее, чем единица (например, $g = 0,2$), то максимальное из включенных сопротивлений практически не изменится, так как $e^{\frac{2r_c}{a_B^*+2g}} \approx e^{\frac{2r_c}{a_B^*}}$. С другой стороны, бесконечный кластер будет представлять сетку с расстоянием между узлами порядка

$$R_c = r_D \left(\frac{r_D}{ga_B^*} \right)^\nu. \quad (13.4)$$

Такая сетка называется в теории прыжковой проводимости *критической*. Именно она и ответственна за протекание тока.

Действительно, дальнейшее увеличение величины r' , т. е. включение остальных сопротивлений, не приведет к существенно-

му изменению удельного сопротивления. Как видно из формулы (13.1), сопротивления с $r - r_c \gg a_B^*$ очень велики по сравнению с сопротивлениями с $r = r_c$. Поэтому фактически через эти сопротивления ток всё равно не течёт, предпочитая критическую сетку, максимальные сопротивления которой равны

$$\mathcal{R}_{max} = \mathcal{R}_0 e^{-\frac{2r_c}{a_B^*}}.$$

Итак, нам осталось вычислять удельное сопротивление критической сетки. Подобно тому, как это делалось в гл. 12, представим эту сетку в виде проволочного каркаса, изображающего простую кубическую решетку (рис. 3.7) с периодом R_c .

Каждая проволочка, соединяющая два соседних узла решётки, состоит из большого числа последовательно соединённых исходных сопротивлений, определяемых формулой (13.1). Так как отдельные сопротивления чудовищно отличаются друг от друга, сопротивление одной проволочки следует считать равным максимальному из входящих в нее сопротивлений, т. е. \mathcal{R}_{max} . Элементарный кубик простой кубической решётки (рис. 6.1) состоит из четырёх параллельно соединённых проволочек, причём каждая проволочка принадлежит также четырём другим кубикам, так что на долю каждого кубика приходится одна проволочка с сопротивлением \mathcal{R}_{max} .

Для того чтобы получить удельное сопротивление, необходимо умножить полное сопротивление кубика \mathcal{R}_{max} на площадь его грани (R_c^2) и разделить на длину ребра (R_c). Таким образом,

$$\rho = \mathcal{R}_{max} R_c = \mathcal{R}_0 \cdot R_c e^{-\frac{2r_c}{a_B^*}}. \quad (13.5)$$

При этом мы обращаемся с кубиком так, как будто он заполнен однородным веществом с удельным сопротивлением ρ . Именно такой смысл и вкладывают в понятие удельного сопротивления системы, которая на самом деле сильно неоднородна.

13.6. Обсуждение результата

Необходимо иметь в виду, что различные части формулы (13.5) получены с разной степенью точности. Множитель, который называют предэкспоненциальным множителем, получен с точностью до численного коэффициента. Действительно, фактически мы, например, не знаем число g в выражении (13.4) для R_c . Кроме того, замена сетки бесконечного кластера периодической решёткой вполне может привести к ошибке в численном коэффициенте. Следует заметить, что в настоящее время не существует теории, позволяющей достоверно определить численный коэффициент в предэкспоненциальном множителе.

Что же касается величины, стоящей в показателе экспоненты формулы (13.5), то она известна с хорошей точностью. По смыслу вывода формулы (13.5) в показатель экспоненты вместо r_c можно было бы подставить $r_c + a_B^* g$.

Тогда вместо $\frac{2r_c}{a_B^*}$ возникла бы сумма $\frac{2r_c}{a_B^*} + 2g$. Второй член суммы фактически характеризует неопределённость, с которой нам известен показатель экспоненты. Как уже говорилось, при малых концентрациях доноров $\frac{2r_c}{a_B^*} \gg 1$, поэтому относительная погрешность мала. Фактически она отражает неопределённость численного коэффициента в предэкспоненциальном множителе. Именно

показателем экспоненты определяется зависимость удельного сопротивления ρ от концентрации доноров. Согласно (13.2), (13.5)

$$\ln \rho = \ln \mathcal{R}_0 \cdot R_c + \frac{2 \cdot 0,86}{N_D^{\frac{1}{3}} a_B^*}. \quad (13.6)$$

Первый член в правой части (13.6) зависит от N_D гораздо слабее, чем второй, и его можно считать константой. Сравнение формулы (13.6) с экспериментальными данными, выполненное для очень многих полупроводников, показало, что эта формула очень точно описывает зависимость $\ln \rho$ от N_D , что явилось важным достижением изложенной выше теории.

Метод, который описан в этой главе, с успехом применялся также для нахождения температурной зависимости прыжковой электропроводности, зависимости от внешнего магнитного поля и от ряда других параметров. Более того, этот метод применим к любой неоднородной системе, сопротивление которой меняется от точки к точке в широких пределах.

Глава 14.

Заключительная

В этой, последней, главе мы кратко обсудим некоторые приложения теории протекания, которые не попали в предыдущие главы, но представляются нам интересными, а также подведём итог всему сказанному, попытавшись определить, что общего между всеми рассмотренными задачами.

14.1. Некоторые приложения

Протекание жидкости по лабиринту. Проблема тесно связана с задачей о проникновении газа в угольную маску, положившей начало теории протекания. Представьте пористое тело, в которое под давлением нагнетается жидкость. Жидкость не смачивает тело, так что капиллярные силы препятствуют её проникновению в поры.

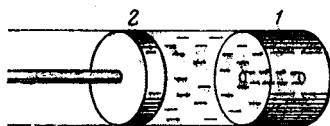


Рис. 14.1.

Лабиринт из капилляров пронизывает всё тело, но диаметры капилляров сильно отличаются друг от друга. В одних местах капилляры широкие, а в других — узкие.

Представим сначала, что в теле имеется лишь один цилиндрический капилляр. Слева от тела 1 находится жидкость при некотором давлении, создаваемом поршнем 2 а справа — воздух при атмосферном давлении (рис. 14.1). Тело закреплено и не может двигаться. Из-за поверхностного натяжения несмачивающая жидкость проникает в капилляр, только если её давление превышает атмосферное давление на величину $\frac{2\sigma}{R}$, где R — радиус капилляра, а σ — коэффициент поверхностного натяжения. При меньших давлениях жидкость образует выпуклый мениск, но не проходит через капилляр.

Теперь представим, что в теле существуют капилляры разных радиусов. При заданном значении давления жидкости некоторые из них (самые широкие) пропускают жидкость, а некоторые (более узкие) не пропускают. С увеличением давления число пропускающих жидкость капилляров увеличивается. При малых давлениях, когда пропускают лишь самые толстые капилляры, жидкость не может проникнуть в тело дальше приповерхностного слоя. Однако при некотором критическом давлении пропускающие капилляры образуют систему, пронизывающую всё тело. Начиная с этого давления, жидкость просачивается через тело.

Вычисление этого давления, а также ряда других характеристик процесса представляет очень важное с точки зрения практических нужд приложение теории протекания.

Образование полимерных гелей. Полимер — это макромолекула, состоящая из огромного числа элементарных единиц (мономеров). Находящиеся в растворе мономеры могут связываться друг с другом, образуя сложную трёхмерную сетку, пронизывающую всю систему. В результате образуется гель — твёрдообразная среда, напоминающая желе или студень.

Существует модель, удовлетворительно описывающая образование геля. Она сводится к задаче теории протекания, где белыми узлами являются молекулы мономера, а чёрными — молекулы растворителя. Связи между белыми узлами осуществляются с вероятностью, зависящей от температуры. Образование бесконечного кластера из связанных белых узлов соответствует появлению геля.

Такая задача теории протекания называется смешенной, поскольку случайными элементами являются и узлы, и связи. Пусть вероятность того, что некоторый узел является белым, равна x_1 (она равна концентрации молекул мономера), а вероятность того, что данная связь не разорвана, равна x_2 . Нужно найти область значений x_1 и x_2 , в которой существует бесконечный кластер из связанных друг с другом белых узлов.

По определению x_1 и x_2 изменяются в интервале от нуля до единицы.

Если $x_2 = 1$, т. е. все связи целые, то бесконечный кластер существует при всех x_1 в области $x_y \leq x_2 \leq 1$, где x_y — порог протекания задачи узлов. Если $x_1 = 1$, т. е. все узлы белые, то для существования бесконечного кластера необходимо условие $x_{св} \leq x_2 \leq 1$, где $x_{св}$ — порог протекания задачи связей.

Квадрат на рис. 14.2 включает всю область изменения переменных x_1 и x_2 . Сплошной кривой показан график функции $x_{min}(x_2)$, описывающей границу области существования бесконечного кластера. При каждом значении x_2 в интервале $x_{cв} < x_2 < 1$ функция $x_{min}(x_2)$ даёт минимальное значение x_1 , при котором существует бесконечный кластер. Легко понять, что $x_{min}(1) = x_y$, а $x_{min}(x_{cв}) = 1$. Сама область существования бесконечного кластера на рис. 14.2 заштрихована.

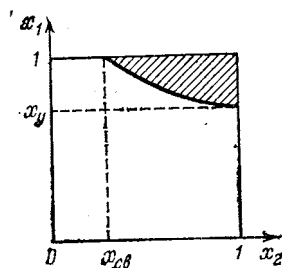


Рис. 14.2.

Если вероятность x_2 задана при всех значениях температуры, то с помощью функции $x_{min}(x_2)$ можно найти область температур и концентраций мономера, в которой образуется гель.

14.2. Что же такое теория протекания?

В этой книге нигде не фигурировало определение того, что называется теорией протекания. Дать такое определение не очень просто. Попробуем же теперь, на последней странице книги, сформулировать, что общего между всеми задачами, о которых шла речь, и что, собственно, является предметом теории протекания.

Теория протекания занимается связностью очень большого (макроскопического) числа элементов при условии, что связь каждого элемента со своими соседями носит случайный характер, но задается вполне определённым способом (например, с помощью генератора случайных чисел, обладающего конкретными свойствами).

Различные задачи теории протекания объединяются тем, что геометрия связанных элементов вблизи порога протекания у них одинакова. Для того чтобы это заметить, нужно отвлечься от мелкомасштабной структуры, определяемой характером связей и свойствами элементов, и следить только за связностью больших блоков. Универсальная крупномасштабная геометрия диктует универсальные свойства физических величин, зависящих от структуры больших кластеров. Это и объединяет столь не похожие друг на друга задачи теории протекания.