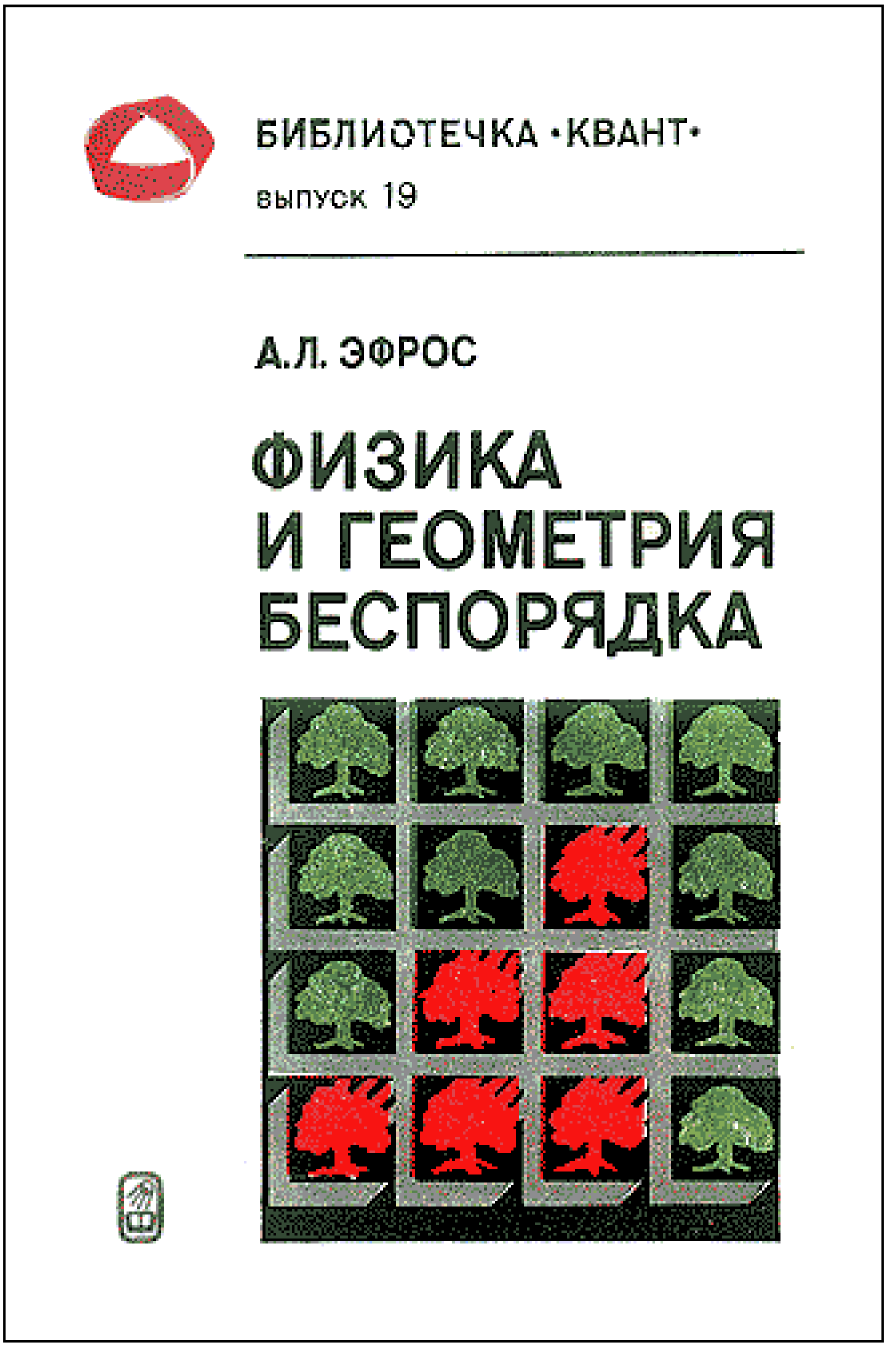
квант



Ответы и решения

Текст и иллюстрации воспроизведены с издания:

А. Л. Эфрос «Физика и геометрия беспорядка»
(Библиотечка «Квант», выпуск 19),
М., Изд. «Наука», Гл. редакция физ.-мат. литературы, 1982 г.

Публикация подготовлена учениками московской гимназии № 1543 Владимиром Александровым, Даниилом Мусатовым, Николаем Винниченко и др. в 1999-2000 гг.

Ответы и решения

Глава 1

1. По общему правилу для нахождения среднего необходимо каждое возможное значение случайной величины умножить на вероятность этого значения и все произведения сложить. Вероятность того, что любая из граней кубика оказалась сверху, равна $\frac{1}{6}$. Следовательно,

$$\bar{a} = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{21}{6}.$$

2. Результаты отдельных опытов изменяются, но среднее значение $x_c(\mathcal{N})$, вычисленное с помощью многих опытов, остаётся тем же, так как движение слева направо в среднем осуществляется столь же вероятно, как и сверху вниз. Соответственно, не изменится и $x_c = \lim\limits_{\mathcal{N} \to \infty} x_c(\mathcal{N})$.

3. Обозначим пороговые значения, полученные в опыте под номером i, через x_i' и x_i, причем x_i' соответствует новому определению порога, а x_i — старому (слева направо). Если по мере уменьшения x сначала исчезло протекание слева направо, а потом сверху вниз, то $x_i' = x_i$. Если же это случилось в обратной последовательности, то $x_i' > x_i$. Среднее значение порога при новом определении равно

$$x_c'(\mathcal{N}) = \frac{x_1' + x_2' + \cdots + x_Q'}{Q},$$

а при старом определении

$$x_c(\mathcal{N}) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_Q}{Q}.$$

В обеих формулах полное число опытов Q считается очень бошьшим. Но при большом числе опытов ситуации, когда $x'_i > x_i$ обязательно возникнут. Поэтому $x'_c(\mathcal{N}) > x(\mathcal{N})$. Однако,

$$\lim_{\mathcal{N}\to\infty} x'_c(\mathcal{N}) = \lim_{\mathcal{N}\to\infty} x_c(\mathcal{N}) = x_c.$$

Дело в том, что порог протекания в бесконечной системе является величиной не случайной, а достоверной, которая не меняется от опыта к опыту. В то же время отличие порогов протекания в разных направлениях есть явление случайное. В среднем с точки зрения протекания все направления эквивалентны. Поэтому x_c не зависит от направлепия.

4. Решение аналогично предыдущему.

Обозначим пороговые значения, полученные в опыте под номером i, через x''_i и x_i, причем x''_i соответствует новому определению порога, а x_i — старому. Легко доказать, что $x''_i \leqslant x_i$. Рассуждая, как в предыдущей задаче, получим

$$x''_c(\mathcal{N}) < x_c(\mathcal{N}), \text{но} \lim_{\mathcal{N}\to\infty} x''_c(\mathcal{N}) = \lim_{\mathcal{N}\to\infty} x_c(\mathcal{N}) = x_c.$$

5. Расчёт по формуле (1.8) дает $\delta = 0{,}01$. Это значит, что «типичные» отклонения от среднего значения равны $\pm 0{,}01$. Отсюда следует, что последний знак в числе 0,59, полученном Ватсоном и Лисом, с довольно большой вероятностью мог оказаться ошибочным. С гораздо меньшей вероятностью мог оказаться ошибочным первый знак. Поскольку был сделан только один опыт, сами авторы могли оценить лишь погрешность, с которой они определяли порог протекания при использованной ими последовательности блокируемых узлов. (Она оказалась $\pm 0{,}005$.) Однако, они ничего не могли сказать о том, как изменится результат при повторении опыта с другой случайной последовательностью. Более поздние исследования, в программу которых входило много опытов при одном значении $\mathcal{N}$, а также опыты с большими $\mathcal{N}$, привели к установлению формулы (1.8). Эти опыты также доказали, что, по-видимому, число 0,59 правильно даже в последнем знаке, что в значительной мере следует считать результатом везения.

Глава 2

1. Доля блокированных узлов равна $1 - x = \frac{\mathcal{N}'}{\mathcal{N}}$, а доля неблокированных узлов равиа $x = \frac{\mathcal{N}-\mathcal{N}'}{\mathcal{N}}$. Если выбрать случайно Q узлов, то среди них окажется Qx неблокированных и $Q(1-x)$ блокированных (чем больше число Q, тем с большей точностью будет выполняться это соотношение). Поэтому вероятность того, что случайно выбранный узел окажется блокированным, равна $\frac{Q(1-x)}{Q} = 1 - x$, а вероятность того, что он окажется неблокированным, равна $\frac{Qx}{Q} = x$. Так как узел может быть либо блокированным, либо неблокированным, сумма вероятностей равна единице: $1 - x + x = 1$.

2. Вероятность любой последовательности из трёх фиксированных чисел равна $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$. Число разных последовательностей, удовлетворяющих поставленным условиям для чисел 1, 2, 3, равно 6 (123; 213; 321; 231; 132; 312), а для чисел 1, 2, 2 равно 3(122; 212; 221). Вероятность того, что осуществляется одна из возможных последовательностей, равна сумме вероятностей. Следовательно, в первом случае искомая вероятность равна $6 \cdot \frac{1}{216} = \frac{1}{36}$, а во втором случае $3 \cdot \frac{1}{216} = \frac{1}{72}$.

3. $(0{,}8)^3 \cdot (0{,}9)^4 = 0{,}336$.

4. Решение не приводится.

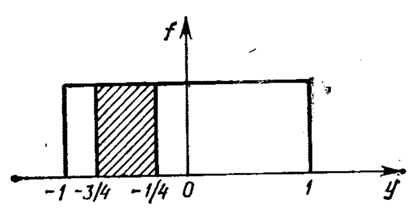


Рис. О.1.

5. Функция распределения случайной величины a является постоянной величиной в интервале (-1, 1) и равна нулю вне этого интервала (рис. О.1). Так как полная площадь прямоугольника, ограниченная кривой $f(y)$ (в данном случае горизонтальной прямой), осью абсцисс и перпендикулярами, восстановленными в точках -1 и 1, должна равняться единице, то $f(y) = \frac{1}{2}$ при $-1 < y < 1$.

По общему правилу искомая вероятность равна площади прямоугольника, ограниченного прямой $f(y)$, осью абсцисс и перпендикулярами, восстановленными в точках $y = -\frac{3}{4}$ и $y = -\frac{1}{4}$. (Этот прямоугольник на рис. О.1 заштрихован.) Вероятность равна $(-\frac{1}{4} - (-\frac{3}{4})) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

6. Переменная y пробегает любые значения от $-\infty$ до ∞.

Поэтому в формулах (2.3) и (2.4) следует положить $A = -\infty$, $B = \infty$. Согласно формуле (2.3)

$$\bar{a} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_{\mathcal{N}}(y)\, dy.$$

Подставляя формулу (2.6), получим

$$\bar{a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta_{\mathcal{N}}^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y \exp\left(-\frac{y^2}{2\delta_{\mathcal{N}}^2}\right)\, dy.$$

Под знаком интеграла стоит нечетная функция. Сделав замену переменной $y = -t$ и сравнив результат с исходной формулой, замечаем, что $\bar{a} = -\bar{a}$. Отсюда следует $\bar{a} = 0$.

Согласно формуле (2.4) дисперсия

$$\delta^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{\mathcal{N}}(y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta_{\mathcal{N}}^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2\delta_{\mathcal{N}}^2}\right)\, dy.$$

Заменим переменную: $y = \sqrt{2}\delta_{\mathcal{N}} t$. Тогда

$$\delta^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \delta_{\mathcal{N}}^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2}\, dt.$$

Интеграл по t равен $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Поэтому получаем $\delta^2 = \delta_{\mathcal{N}}^2$.

Глава 3

1. По определению $P(1) = 1$. При x, близких к единице, узлы могут не принадлежать к бесконечному кластеру по двум причинам:

а) В них могут быть немагнитные атомы. Доля таких узлов равна $1 - x$.

б) Магнитные атомы могут быть изолированы от бесконечного кластера, как, например, атом B на рис. 3.4. Но при x, близком к единице, когда немагнитных атомов мало, эта причина менее существенна, так как для такой изоляции требуется, чтобы несколько немагнитных атомов (4 в случае плоской решётки, показанной на рис. 3.4) собрались вокруг одного атома. При малом числе немагнитных атомов вероятность такого события мала. Поэтому вторую причину можно не принимать во внимание и считать, что доля атомов, принадлежащих бесконечному кластеру, равна просто доле магнитных атомов. Итак, при условии, что $1 - x \ll 1$, имеем $P(x) = x$.

2. В простой кубической решётке каждый атом имеет 6 ближайших соседей, расположенных от него в направлениях рёбер куба (рис. 3.7). Вероятность W_0 того, что все ближайшие соседи некоторого атома являются немагнитными атомами, равна произведению шести вероятностей: $W_0 = (1 - x)^6$. Вероятность W того, что хотя бы один из них является магнитным атомом, равна

$$W(x) = 1 - W_0 = 1 - (1 - x)^6.$$

Согласно формуле (3.2)

$$P_2(x) = xW(x) = x\left(1 - (1 - x)^6\right).$$

При $x \ll 1$

$$P_2(x) \approx 6x^2.$$

Легко сообразить, что для любой решётки, в которой каждый атом имеет z ближайших соседей,

$$P_2(x) = xW(x) = x\left(1 - (1 - x)^z\right),$$

а при $x \ll 1$

$$P_2(x) = zx^2.$$

3. На рис. О.2 изображены 12 атомов, находящихся в окрестности атома *0*. Все они могут принять участие в образовании кластера из трёх атомов. Такой кластер может быть образован, например, атомами *1*, *0*, *2*, если все эти три атома окажутся магнитными. Вероятность этого события равна произведению трёх вероятностей $x \cdot x \cdot x = x^3$. Вероятность, что кластер образовали атомы *0*, *4*, *12* или любая другая тройка атомов, также равна x^3.

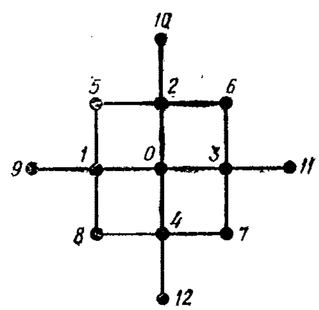


Рис. О.2.

Прежде всего нужно ответить на вопрос, сколько таких троек существует. Сосчитаем сначала, сколько троек содержат атомы *0* и *1*. Таких троек 6. Это *015*; *018*; *019*; *103*; *102*; *104*.

Теперь перейдем к тройкам, включающим атомы *0* и *3*, но не включающим атом *1*. Их пять: *036*; *03 11*; *037*; *203*; *304*.

Аналогично имеется четыре тройки, включающие атомы *0* и *2*, но не включающие атомы *1* и *3*: *025*; *026*; *02 10*; *204* и три тройки, включающие атомы *0* и *4*, но не включающие *1*, *2*, *3*. Это *047*; *048*; *04 12*.

Итак, существует $6+5+4+3 = 18$ троек, причем вероятность каждой из них равна x^3. Нужно найти вероятность того, что возникла хотя бы одна из них. При $x \ll 1$ с событиями, состоящими в том, что возникла одна из троек, можно обращаться как с событиями несовместимыми. Действительно, вероятность того, что образовались одновременно тройка *102* и

015, равна вероятности того, что *четыре* атома *0125* — магнитные, т. е. образовался кластер из *четырёх* атомов. Вероятность этого события равна $x^4 = x^3 \times x \ll x^3$. Итак, при $x \ll 1$ тройки можно считать несовместимыми. Тогда вероятность того, что образовалась хотя бы одна из них, равна сумме вероятностей, и

$$P_3 = 18x^3.$$

4. Вероятность того, что выбранный наугад атом принадлежит кластеру не менее, чем иэ двух атомов, можно представить в виде суммы вероятностей несовместимых событий:

$$P_2(x) = P_3(x) + \bar{P}_2(x), \tag{O.1}$$

где $\bar{P}_2(x)$ вероятность того, что атом принадлежит кластеру из двух атомов. Отсюда следует:

$$P_3(x) = P_2(x) - \bar{P}_2(x), \tag{O.2}$$

Функция $P_2(x)$ определяется формулой (3.3), и, следовательно, нужно только вычислить $\bar{P}_2(x)$.

Атом *0* (рис. О.2) может образовать кластер из двух атомов с атомами *1*, *2*, *3* или *4*. Вероятность того, что кластер образован атомами *0* и *1*, равна вероятности того, что оба эти атома магнитные, умноженной на вероятность того, что атомы *2*, *3*, *4*, *8*, *9* и *5* — немагнитные, т. е. равна $x^2(1-x)^6$. Точно такие же вероятности имеют события, состоящие в том, что кластер из двух атомов образован атомами *0* и *2*, или *0* и *3*, или *0* и *4*. Все эти события являются несовместимыми, и поэтому вероятность $P_2(x)$ равна сумме четырёх веротностей:

$$P_2(x) = 4x^2(1-x)^6. \tag{O.3}$$

Подставляя формулу (О.3) в формулу (О.2), получаем

$$P_3(x) = x\left(1-(1-x)^4\right) - 4x^2(1-x)^6, \tag{O.4}$$

что и решает поставленную задачу.

Воспользовавшись формулой бинома, легко доказать, что выражение (О.4) не содержит членов, у которых степень была бы меньше, чем третья. Если $x \ll 1$, то $P_3(x) \approx 18x^3$, что совпадает с результатом предыдущего упражнения,

Глава 4

1. 0,0085; 0,0072; 0,0051; 0,0026; 0,0006; 00000; 0,0000 ... 0,0067; 0,0044; 0,0019; 0,0003; 0,0000; 0,0000 ... 0 0032; 0,001; 0,0001; 0,0000; 0,0000 ...

2. Число b является фактически n-значным. Поэтому $b < 10^n$. Для того чтобы получить следующее число b', нужно найти b^2, поделить на 10^n и взять целую часть. Таким образом, $b' < \frac{b^2}{10^n}$, но $\frac{b^2}{10^n} = b \cdot \frac{b}{10^n}$. Так как $\frac{b}{10^n} < 1$, то $\frac{b^2}{10^n} < b$. Отсюда следует $b' < b$, что и нужно было доказать.

3. 5, 15, 5, 15, 5, 15 ...

4. 5, 16, 9, 8, 5, 16, 9, 8, 5 ...

5. 5, 17, 13, 1, 5, 17, 13, 1, 5 ...

6. Всюду не выполнено условие *в*. В упражнении 3 $c = 0$, в упражнении 5 не выполнено также условие *а* и т. д.

7. Пусть $X_0 = 0$. Тогда получаем 0, 3, 1, 4, 2, 0, 3, 1, 4, 2 ... При любом значении X_0 число X_1 совпадает с одним из чисел этой последовательности.

8. Функция распределения случайных чисел, которые даёт генератор, изображена на рис. 2.3. Из этих чисел составлен массив V. Доля неблокированных узлов в массиве V равна доле случайных чисел в массиве V, удовлетворяющих неравенству $V < t$. Следовательно, средняя доля неблокированных узлов равна вероятности того, что случайное число окажется меньше, чем t. По определению функции распределения эта вероятность равна площади, ограниченной кривой $f(y)$, осью абсцисс и перпендикулярами, восстановленными в точках 0 и t. В данном случае это площадь прямоугольника, равная t. Следовательно, средняя доля неблокированных узлов x равна t.

Глава 5

1. При значениях x, близких к единице, почти все узлы принадлежат бесконечному кластеру. Не принадлежат к нему лишь такие узлы, у которых оборваны все связи, соединяющие их с остальной системой. Вероятность того, что оборвана одна определённая связь, равна $1 - x$. В случае квадратной решётки для того, чтобы один узел оказался изолированным от системы, необходимо, чтобы были порваны четыре выходящие из него связи. (Рис. О.3, *а*) Вероятность этого события равна произведению вероятностей, т. е. равна $(1-x)^4$. Для того чтобы были изолированы от системы два узла, нужно, чтобы было порвано шесть связей (рис. О.3, *б*). Вероятность этого события равна $(1 - x)^6$. При условии, что $1 - x \ll 1$, она значительно меньше вероятности того, что изолирован один узел. Таким образом, в интересующем нас предельном случае можно считать, что все изолированные узлы располагаются по одиночке и вероятность того, что выбранный наугад увел изолирован, равна $(1-x)^4$. Вероятность того, что выбранный наугад узел не изолирован, равна $1 - (1 - x)^4$, т. е. для квадратной решётки

$$P^{\text{св}}(x) = 1 - (1 - x)^4.$$

Рассуждая таким же образом, получим, что для треугольнай решётки

$$P^{\text{св}}(x) = 1 - (1 - x)^6,$$

а для шестиугольной решётки

$$P^{\text{св}}(x) = 1 - (1 - x)^3.$$

Эти результаты справедливы, если $1 - x \ll 1$.

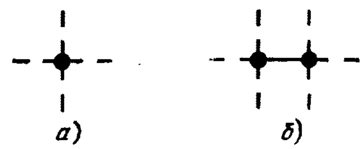


Рис. О.3. а) Один изолированный узел; б) два изолированных узла. Целая связь показана сплошной линией, а порванные связи —штриховыми.

2. Задача решается так же, как предыдущая. При условии $1 - x \ll 1$ почти все узлы принадлежат бесконечному кластеру. Выбранный наугад узел изолирован от бесконечного кластера, если все узлы, являющиеся его ближайшими соседями, содержат немагнитные атомы (для определённости мы пользуемся терминологией задачи о ферромагнетике). Как и в предыдущей задаче, вероятность того, что одним из соседей рассматриваемого узла является магнитный атом, но изолированный от бесконечного кластера, мала. Поэтому достаточно лишь вычислить вероятность того, что все соседи данного узла являются немагнитными атомами. Вероятность того, что в некотором узле находится немагнитный атом, равна $1 - x$. Число ближайших соседей равно числу связей, выходящих из данного узла. Поэтому результаты получаются такие же, как в предыдущем упражнении:

- для квадратной рашетки $P^{\text{у}}(x) = 1 - (1 - x)^4$;
- для треугольной $P^{\text{у}}(x) = 1 - (1 - x)^6$;
- для шестиугольной $P^{\text{у}}(x) = 1 - (1 - x)^3$.

Таким образом, при значениях x, близких к единице, $P^{\text{у}}(x) = P^{\text{св}}$, что не противоречит формуле (5.2).

3. Рассмотрим шестиугольную решётку с долей белых связей, равной x, и треугольную решётку с долей белых связей, равной y.

Напомним, что термин «белая связь» является синонимом термина «целая связь» а «чёрная связь» — это «разорванная связь», Термин узел «связан» с другим узлом, если это не оговорено специально, нужно понимать так, что он связан посредством неразорванных, т. е. белых связей.) Наложим решётки друг на друга, как показано на рис. О.4. При этом узлы типа A, B, C являются общими для обеих решёток, а узлы типа D принадлежат только шестиугольной решётке. Идея дальнейших рассуждений состоит в том, что задачу о протекании на шестиугольной решётке можно свести к соответствующей задаче на треугольной решётке.

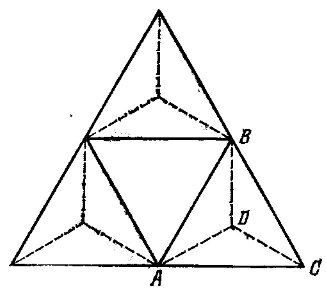


Рис. О.4. Преобразование звезды в треугольник. Штриховыми линиями показана шестиугольная решётка, а сплошными — треугольная.

Вероятности того, что узлы A, B и C связаны друг с другом, нужно выразить через величину x — долю белых связей шестиугольной решётки. При этом необходимо использовать геометрию и статистические свойства связей, выходящих из узлов типа D. После этого можно рассматривать только треугольную решётку, показанную на рис. О.4 сплошными линиями, забыв о том, что внутри каждого треугольника есть штриховые линии и узлы типа D.

Этот приём широко используется при расчёте электрических цепей и называется «преобразованием звезды в треугольник».

Фактически потребуются следующие величины:

1) W_{--} — вероятность того, что узел A не связан ни с узлом B, ни с узлом C. Эта вероятность равна сумме вероятностей двух несовместимых событий. Первое событие состоит в том, что связь AD — чёрная, а связи BD и DC — какие угодно. Его вероятность равна $1 - x$. Второе событие состоит в том, что связь AD — белая, а обе связи BD и DC — чёрные. Вероятность этого события равна произведению трех

вероятностей $x(1-x)(1-x)$. В результате

$$W_{--}(x) = 1 - x + (1-x)^2. \tag{О.5}$$

2) W_{+-} — вероятность того, что узел A связан с B, но не связан с C. Она равна вероятности того, что связи AD и DB — белые, а связь DC — чёрная, и вычисляется как произведение вероятностей всех трех событий:

$$W_{+-} = x^2(1-x). \tag{О.6}$$

3) W_{-+} — вероятность того, что узел A связан с C, но не связан с B. Легко убедиться, что она равна W_{+-}.

4) W_{++} — вероятность того, что узел A связан и с B, и с C, Она равна вероятности того, что все три связи AD, DB и DC — белые, и вычисляется как произведение вероятностей:

$$W_{++} = x^3. \tag{О.7}$$

Зная эти четыре вероятности, можно больше не возвращаться к шестиугольной решётке, а решать задачу протекания на треугольной решётке. Если бы её удалось решить, то было бы найдено критическое значение $x_{\text{СВ}}(\text{Ш})$ для шестиугольной решётки.

Решать задачу в таком виде, разумеется, нисколько не легче. Однако, можно выразить те же самые вероятности W через величину y, представляющую долю белых связей на треугольной решётке. На пороге протекания эти вероятности имеют вполне определённое значение, которое пока неизвестно, но, приравняв вероятности, выраженные через x, к вероятностям, выраженным через y, можно получить соотношение, связывающее пороги шестиугольной ($x_{\text{СВ}}(\text{Ш})$) и треугольной ($x_{\text{СВ}}(\text{Т})$) решёток.

Итак, следующая задача состоит в том, чтобы выразить все четыре вероятности через y.

1) W_{--}. Узел A не связан ни с B, ни с C, если связи AB и AC — чёрные, а связь BC — какая угодно. Вероятность этого события равна

произведению вероятностей

$$W_{--}(y) = (1-y)^2. \tag{О.8}$$

2) W_{+-}. Узел A связан с B, но не связан с C только, если связь AB — белая, а обе связи BC и AC — чёрные

$$W_{+-} = y(1-y)^2. \tag{О.9}$$

(Если бы, например, связь BC была белой, то узел A был бы связан с C по пути ABC.)

3) $W_{-+} = W_{+-}$, как и в предыдущем случае.

4) W_{++}. Вероятность того, что узел A связан и с B, и с C, равна сумме вероятностей четырёх несовместимых событий. Первое событие состоит в том, что все три связи AB, BC и AC — белые. Его вероятность равна y^3. Три других события состоят в том, что чёрной является лишь одна из трёх связей. Например, если чёрной связью является AB, то узел A связан с C через белую связь AC и связан с B по пути ACB. Вероятность каждого из трёх событий равна $y^2(1-y)$. В результате получаем, что

$$W_{++}(y) = y^3 + 3y^2(1-y). \tag{О.10}$$

На пороге протекания все $W(x)$ должны равняться $W(y)$. Поэтому возникает система уравнений:

$$W_{--}(x) = W_{--}(y);\ 1 - x + x(1-x)^2 = (1-y)^2, \tag{О.11}$$

$$W_{+-}(x) = W_{+-}(y);\ x^2(1-x) = y(1-y)^2, \tag{О.12}$$

$$W_{++}(x) = W_{++}(y);\ x^3 = y^3 + 3y^2(1-y). \tag{О.13}$$

Эти уравнения должны удовлетворяться при подстановке $x = x_{\text{св}}(\text{Ш})$ и $y = x_{\text{св}}(\text{Т})$. Кроме того, пороги протекания удовлетворяют соотношению (5.23). Из него следует, что $x_{\text{св}}(\text{Ш}) = 1 - x_{\text{св}}(\text{Т})$. Подставим в уравнения (О.11), (О.12), (О.13)

$$y = x_{\text{св}}(\text{Т}),\ x = 1 - x_{\text{св}}(\text{Т}).$$

Уравнение (О.12) превращается при этом в тождество

$$(1 - x_{\text{св}}(\text{Т}))^2 x_{\text{св}}(\text{Т}) = x_{\text{св}}(\text{Т})(1 - x_{\text{св}}(\text{Т}))^2,$$

а уравнения (О.11) и (О.13) приводятся к одному и тому же кубическому уравнению:

$$x^3_{\text{св}}(\text{Т}) - 3x_{\text{св}}(\text{Т}) + 1 = 0.$$

В интервале $0 \leqslant x_{\text{св}}(\text{Т}) \leqslant 1$ это уравнение имеет единственный корень

$$x_{\text{св}}(\text{Т}) = 2\sin\frac{\pi}{18} \approx 0{,}347296.$$

Соответственно

$$x_{\text{св}}(\text{Ш}) = 1 - x_{\text{св}}(\text{Т}) = 1 - 2\sin\frac{\pi}{18} \approx 0{,}652704.$$

4. Прежде всего нужно найти площадь, приходящуюся на один узел, в каждой из трёх решёток, изображённых на рис. 5.1, при условии, что расстояние между ближайшими друг к другу узлами равно a.

Квадратная решетка. Каждому квадрату принадлежит 4 узла, но каждый из этих узлов принадлежит четырём разным квадратам. Следовательно, на долю каждого квадрата остаётся один узел, или, иными словами, каждому узлу принадлежит площадь одного квадрата, т. е. $S(\text{К}) = a^2$.

Треугольная решетка. Каждому треугольнику принадлежит 3 узла, но каждый из этих узлов является собственностью шести разных треугольников. Таким образом, на один треугольник приходится половина узла, а на один узел приходится площадь, равная двум площадям треугольника. Площадь равностороннего треугольника со стороной a равна $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. Следовательно, одному узлу принадлежит площадь $S(\text{Т}) = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$.

Шестиугольная решетка. Каждому шестиугольнику принадлежит 6 узлов, но каждый из этих узлов принадлежит трём разным шестиугольникам. Следовательно, на один шестиугольник приходится два узла. Площадь шестиугольника равна площади шести равносторонних треугольников со стороной a, т. е. равна $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$. Следовательно, на каждый узел приходится площадь $S(\text{Ш}) = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Для каждой из решёток величина a определяется с помощью заданной функции $a(x)$, причём в качестве x нужно использовать порог протекания $x_{\text{СВ}}$ для соответствующей решётки. В результате получим

$$S(\text{Т}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(0{,}35a)^2; S(\text{К}) = (0{,}5a)^2;$$

$$S(\text{Ш}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}(0{,}65a)^2.$$

Ясно, что функция $a(x)$ убывает с ростом x. (Если пары легче заражают друг друга, значит расстояние между ними уменьшается.) Легко увидеть, однако, что этого утверждения недостаточно, чтобы получить хотя бы одно неравенство между площадями, написанными выше. Действительно, у шестиугольной решётки длина a минимальна, но зато численный коэффициент в выражении для площади максимален, а у треугольной решётки — наоборот. Поэтому, для того чтобы найти решётку с минимальной площадью, надо знать функцию $a(x)$ более детально.

Глава 6

1. Вычисление коэффициентов заполнения для плоских решёток легко делается с помощью результатов упр. 4 к гл. 5. Это было продемонстрировано в тексте на примере шестиугольной решётки. Поэтому мы ограничимся здесь лишь объёмными решётками, причём всего лишь двумя, предоставив читателю сделать всё остальное самостоятельно.

Простая кубическая решетка. Каждому элементарному кубику (рис. 3.7) принадлежит 8 узлов, но каждый из этих узлов является собственностью 8 различных элементарных кубиков. Следовательно, на каждый кубик приходится один узел, а объём, приходящийся на каждый узел, равен объёму элементарного кубика, т. е. a^3. Сферы, описанные вокруг узлов, имеют радиус $\frac{a}{2}$ и объём $\frac{4\pi a^3}{24}$. Доля объёма, занимаемая сферами, равна отношению объёма одной сферы к объёму, приходящемуся на один узел. Следовательно, для ПК-решётки

$$f(\text{ПК}) = \frac{4\pi}{24} \approx 0{,}52.$$

Объемноцентрированная кубическая решетка. Каждому элементарному кубику (рис. 6.2, *б*) принадлежит 9 узлов, из которых 8 находятся по углам и один в центре. Узел, находящийся в центре, принадлежит только одному кубику, а каждый из угловых узлов принадлежит 8 разным кубикам. Следовательно, на один элементарный кубик приходится два узла, а объём, приходящийся ра один узел, равен половине объёма кубика, т. е. $\frac{a^2}{2}$. Ближайший сосед каждого узла находится от него на расстоянии, равном половине диагонали кубика, т. е. на расстоянии $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. Радиус сферы, описанной вокруг каждого узла, равен $\frac{\sqrt{3}a}{4}$, а объём сферы равен $\frac{4\pi 3^{\frac{3}{2}}}{3\cdot 64}a^3 = \frac{\pi\sqrt{3}}{16}a^3$. Коэффициент заполнения равен отношению объёма сферы к объёму, приходящемуся на один узел. Таким образом,

$$f(\text{ОЦК}) = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \approx 0{,}68.$$

Глава 7

1. К первой координационной группе узла *0* относятся 12 узлов типа *1* (рис. О.5), ко второй — 6 узлов типа *2*, к третьей — 24 узла типа 3 (на рисунке показаны не все узлы); $12 + 6 + 24 = 42$.

Глава 8

1. Пользуясь формулами (8.3) и (8.5), получим $a^*_{\text{Б}} = 636 \cdot 10^{-8}$ см$= 636\mathring{\text{A}}$, $N_c = 7{,}8 \cdot 10^{13}$ см$^{-3}$. Это уникально низкая критическая концентрация. Переход к металлической проводимости происходит, когда один примесный атом приходится на 10^8 атомов полупроводника! Для того чтобы получить полупроводник с такой концентрацией примесей, требуется очень сложная техника очистки кристалла.

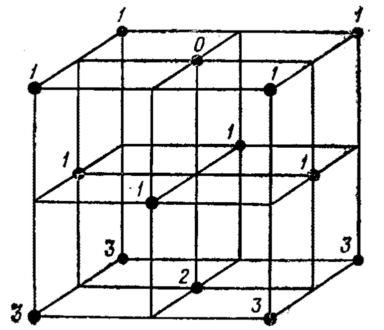


Рис. О.5. Соседи узла *0* в ГЦК-решётке.

Глава 11

1. Введем функцию $Q(x)$ — вероятность того, что информация, попавшая в выбранный наугад узел, достигнет лишь конечное число других узлов. Как и раньше, $P(x) = 1 - Q$. Из каждого узла выходит q независимых каналов, по которым распространяется информация. Найдём вероятность того, что один такой канал прерывается на некотором этапе. Это может быть результатом одного из двух несовместимых событий: *а* — первая связь этого канала оказалась разорванной, *б* — первая связь оказалась целой, но узел, в который она ведёт, способен передать информацию лишь конечному числу других узлов. Вероятность события *а* равна $1 - x$, а вероятность события *б* равна $xQ(x)$. Вероятности несовместимых событий можно складывать. Поэтому вероятность того, что прервётся один канал, равна $1 - x + xQ(x)$. Так как все каналы независимы, то вероятность того, что все они прервутся, равна $(1 - x + xQ(x))^q$.

Отсюда получается уравнение для $Q(x)$:

$$Q(x) = (1 - x + xQ(x))^q.$$

Подстановкой $Q' = 1 - x + xQ$ оно сводится к уравнению (11.4). Окончательно получаем

$$P = \frac{\frac{x-1}{q} 2q^2}{q - 1}.$$

Заметим, что пороги протекания для задачи узлов и задачи связей на решётке Бете одинаковы ($x_c = \frac{1}{q}$). Это можно было бы сказать заранее. Действительно, предположим, что узел, в который веди разорванная связь, блокирован. После этого можно допустить, что все связи целые, и мы вернёмся от задачи связей к задаче узлов. Отсюда следует, что пороги протекания у этих задач должны быть одинаковыми.

Глава 12

1. Нужно вычислить сопротивление куба с единичной длиной ребра. Число параллельно соединённых проволочек по-прежнему равно $\frac{1}{r^2}$, но длина каждой проволочки уже не равна единице. Она больше единицы в число раз, равное отношению $\frac{\mathcal{L}}{R} = (x - x_c)^{-(\zeta-\nu)}$ Соответственно, сопротивление одной проволочки равно не ρ_0, а $\rho_0(x - x_c)^{-(\zeta-\nu)}$. Поэтому, для того чтобы получить требуемый результат, достаточно заменить в формуле (12.6) величину ρ_0, фигурирующую в выражении для σ_3, на $\rho_0(x - x_c)^{-(\zeta-\nu)}$. В результате получим

$$\sigma = \sigma_3(x - x_c)^{\zeta+\nu},$$

где $\sigma_3 = \rho_0^{-1}t^{-2}$. Таким образом, $t = \zeta + \nu$.